Dr. CONSTANTIN UDRIŞTE Dr. ELENA TĂNĂSESCU

MINIME ŞI MAXIME

ale funcţiilor reale de variabile reale

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI

Control ştiinţific: dr. Corneliu Zidăroiu
Redactor: Valentina Creţu
Tehnoredactor: Elena Geru
Coperta: Cristian Tatoli

Bun de tipar: 14.11.1980. Coli de tipar: 12;
C.Z. 517.51

c. 661. — I. P. „INFORMAŢIA"
str. Brezoianu Nr. 23—25,
Bucureşti

PREFAȚĂ

Determinarea valorilor optime (adică minime sau maxime) în multe sectoare ale vieții sociale și economice este de o deosebită importanță. Nu este de mirare că civilizația umană a pus și a rezolvat astfel de probleme încă din antichitate. Ca și întreaga matematică, problemele de minim și maxim, deși antice, au reușit prin evoluția lor să fie totdeauna contemporane cu orice epocă.

Originea unor astfel de probleme, unele chiar fundamentale în activitatea umană, se caracterizează printr-o diversificare care a coincis cu dezvoltarea și amplificarea cunoașterii.

Justețea acestor afirmații, care de fapt confirmă importanța problematicii tratate în cartea de față, reiese limpede din cîteva exemple celebre, care au constituit preocuparea esențială a multor matematicieni de-a lungul veacurilor cît și în epoca actuală.

Euclid, Apollonius, Heron, Arhimede etc. au luat în considerație și au rezolvat numeroase probleme de optim din algebră și geometrie; astfel Heron din Alexandria, inginer și matematician grec din sec. I e.n., studiind fenomenele de reflexie a luminii, a stabilit principiul de optim în baza căruia lumina se propagă pe drumul cel mai scurt. Fermat, matematician francez din sec. XVII, a enunțat principiul de optim din optică, ce îi poartă numele, potrivit căruia într-un mediu optic anizotrop raza de lumină se propagă pe acel arc de curbă pe care timpul de parcurs este minim.

Odată cu descoperirea principiilor analizei matematice, începînd cu secolele XVII și XVIII, s-au pus și bazele principiilor pentru rezolvarea problemelor de optim cu ajutorul metodelor calculului diferențial, stabilindu-se condiții necesare și suficiente pentru funcțiile diferențiabile cu valori reale; din aceeași perioadă provin și primele încercări legate de rezolvarea unor probleme mai complicate, provenite din mecanică, care astăzi se tratează în cadrul calculului variațiilor (capitol al analizei funcționale).

Mecanica analitică a lui L. Lagrange a permis introducerea unui principiu de optim de o mare însemnătate teoretică și aplicativă, principiu legat de numele matematicianului irlandez W. A. Hamilton, care afirmă că într-un interval de timp dat $[t_1, t_2]$ *un sistem de puncte materiale se deplasează astfel încît integrala* $\int_{t_1}^{t_2}(T - t)\mathrm{d}t$ *să atingă o valoare minimă (*T *fiind energia cinetică, iar* t *energia potențială a sistemului considerat).*

Treptat, principiile de optim au început să fie tot mai larg folosite în practică, unele din acestea fiind strîns legate de diverse probleme din teoria ecuațiilor diferențiale sau cu derivate parțiale.

În zilele noastre, în strînsă legătură cu chestiuni avînd caracter tehnic sau economic, teoria problemelor de optim a luat un avînt deosebit; în ritm intens s-au dezvoltat noi ramuri: programarea matematică, controlul optimal, metode numerice de optimizare (odată cu dezvoltarea tehnicii de calcul). Se poate spune, pe drept cuvînt, că întreaga noastră activitate stă sub semnul optimizării; de aceea este cu atît mai semnificativă inițiativa luată de Editura tehnică de a edita acest material, dedicat în întregime rezolvării unor probleme de optim, elaborat de doi matematicieni, cadre didactice cu multă experiență din Institutul politehnic din București.

Cartea de față conține o mare varietate de probleme de optimizare cu caracter teoretic sau practic. Sînt folosite numeroase metode de rezolvare prezentate în mod gradat și riguros. Astfel, se obțin valori extreme ale funcțiilor reale folosind atît raționamente elementare cît și elemente ale calculului diferențial, fiind utilizate și unele investigații moderne în această teorie; toate noțiunile sînt prezentate într-o formă extrem de accesibilă, transformînd astfel expunerea într-o lectură utilă și interesantă. Fiecare capitol cuprinde un număr mare de probleme rezolvate prin care se exemplifică în mod gradat ponderea paragrafelor respective în aplicații teoretice sau pur practice, cît și multe probleme propuse care, cu siguranță, vor stimula interesul pentru rezolvarea lor și deci afortiori pentru parcurgerea capitolului respectiv. De asemenea, este extrem de interesant și meritoriu că autorii reușesc să prezinte multe aplicații ale teoriei extremelor atît în probleme din știință și tehnică cît și în probleme de matematică pură, care, cu certitudine, vor fi bine primite de un public cititor foarte larg.

Prof. dr. **VALTER OLARIU**

CUVÎNT ÎNAINTE

Lucrarea pe care o oferim cititorilor are menirea de a le pune la dispoziţie atît teoria riguroasă a determinării extremelor funcţiilor reale de variabile reale, cît şi tehnici de rezolvare a unor probleme de optimizare devenite de uz curent în aproape toate activităţile noastre. Pe de o parte sînt expuse metode bazate pe derivate, iar pe de altă parte metode de soluţionare a unor programe particulare prin tehnici care nu fac apel la derivare.

Expunerea este gradată şi conţine unele elemente de noutate faţă de cărţile de această factură. De exemplu, determinarea valorilor extreme ale unor funcţii folosind numai principii şi raţionamente elementare (cap. 1), teoria punctelor critice, funcţii Morse (§ 2.6 şi § 3.4), utilizarea programelor în versiune FORTRAN IV pentru determinarea aproximativă a valorilor extreme (§ 2.3 şi § 3.5), geometria catastrofelor elementare ca o variantă a teoriei extremelor (cap. 4), aplicaţii concrete ale teoriei extremelor în ştiinţă şi tehnică (cap. 5, § 4.9, § 6.6, § 7.5, § 7.7) etc.

Conceptele folosite sînt redate într-o formă uşor accesibilă avînd la bază elemente fundamentale de analiză şi geometrie descrise pe înţelesul tuturor şi ilustrate prin figuri. De asemenea, lucrarea conţine multe probleme complet rezolvate şi un număr mare de probleme propuse (cu răspuns), care credem că îi vor asigura funcţionalitatea.

Materialul a fost grupat în 7 capitole şi 59 paragrafe, dintre care capitolul 1 şi paragrafele 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, 5.7, 5.12 au fost elaborate de Elena Tănăsescu, capitolele 2 şi 3 au fost elaborate de ambii autori, iar capitolele 4, 6, 7 şi paragrafele 5.3, 5.6, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 au fost elaborate de Constantin Udrişte. Tuturor colegilor care ne-au ajutat prin sugestii utile le adresăm pe această cale mulţumirile noastre.

Sperăm că parcurgerea cărţii va fi un prilej de cunoaştere, aprofundare şi însuşire ale unor noţiuni fundamentale şi totodată foarte utile în soluţionarea multor probleme de spectru larg. Lucrarea este adresată tuturor celor care în activitatea lor se întîlnesc cu probleme de optimizare: maiştrilor, tehnicienilor, elevilor din ultimii ani de liceu, studenţilor, subinginerilor, inginerilor, cadrelor didactice etc.

AUTORII

CUPRINS

1. Probleme elementare de minim sau maxim 9

1.1. Minimul sau maximul trinomului de gradul al doilea 9
1.2. Maximul produsului pentru sumă constantă 11
1.3. Minimul sumei pentru produs constant 14
1.4. Inegalităţi dintre media aritmetică, media geometrică şi media armonică 16
1.5. Minime şi maxime trigonometrice şi geometrice 17
1.6. Probleme propuse 20

2. Extremele funcţiilor reale de o variabilă reală 23

2.1. Mulţimi mărginite 23
2.2. Valori extreme ale funcţiilor reale 27
2.3. Determinarea aproximativă a extremelor unei funcţii. Funcţii unimodale . . . 32
2.4. Extreme locale ale funcţiilor derivabile 36
2.5. Extreme globale ale funcţiilor derivabile 42
2.6. Funcţii Morse 45
2.7. Funcţii convexe 49
2.8. Probleme propuse 53

3. Extremele funcţiilor reale de mai multe variabile reale 57

3.1. Convexitate 57
3.2. Valori extreme şi programe 62
3.3. Extreme libere 68
3.4. Puncte critice şi funcţii Morse 77
3.5. Metode numerice pentru determinarea extremelor funcţiilor de n variabile . . . 83
3.6. Metoda celor mai nmici pătrate pentru aproximarea unei funcţii 85
3.7. Extreme cu legături 88
3.8. Programe liniare 96
3.9. Probleme propuse 102

4. Geometria catastrofelor elementare 107

4.1. Introducere 107
4.2. Faldul 111
4.3. Întoarcerea 111
4.4. Rîndunica 115
4.5. Fluturele 116
4.6. Ombilicul eliptic 117
4.7. Ombilicul hiperbolic 122
4.8. Ombilicul parabolic 125
4.9. Proprietăţi difeomorf-invariante ale unor legi fizice clasice 126

5. Aplicaţii ale teoriei extremelor 129

5.1. Maximul intensităţii, al fluxului şi al densităţii de radiaţie 129
5.2. Extremele unor funcţii din electrostatică şi circuite electrice de curent continuu 134
5.3. Legea refracţiei 136
5.4. Maximul energiei libere a germenilor în formarea cristalelor 137
5.5. Legi de creştere 139
5.6. Valori proprii ale unei matrice reale simetrice 140

5.7. Extremele momentelor de inerţie 141
5.8. Extremele funcţiilor armonice 145
5.9. Principiul maximului pentru soluţiile ecuaţiei căldurii 146
5.10. Distanţa de la un punct la o mulţime închisă 147
5.11. Distanţa dintre două mulţimi închise 150
5.12. Metoda verosimilităţii maxime 152

6. Programare pătratică 155

6.1. Formularea generală a unui program pătratic 155
6.2. Programe pătratice în două variabile 157
6.3. Condiţiile Kuhn-Tucker 157
6.4. Soluţie combinatorială 160
6.5. Metoda gradientului proiectat 162
6.6. Aplicaţii ale programării pătratice 164
6.7. Probleme propuse 167

7. Programare geometrică pozinomială 169

7.1. Introducere 169
7.2. Inegalitatea geometrică 170
7.3. Infimumul unui pozinom şi supremumul funcţiei duale 172
7.4. Minimul unui pozinom şi maximul funcţiei duale 174
7.5. Aplicaţii 177
7.6. Programe pozinomiale cu restricţii 181
7.7. Aplicaţii 187
7.8. Probleme propuse 192

BIBLIOGRAFIE

1. Ackoff, R., Sasieni, M. *Bazele cercetării operaţionale*. Bucureşti, Editura tehnică, 1975.
2. Allen, R. *Analiză matematică pentru economişti*. Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1971.
3. Apostol, T. *Calculus*. Waltham, Toronto, London, Blaisdell Publishing Company, 1969.
4. Arnold, V. *Ecuaţii diferenţiale ordinare*. Bucureşti, Editura ştiinţifică şi enciclopedică. 1978.
5. Beightler, Ch., Don Phillips. *Applied geometric programming*. New York, John Wiley, 1976.
6. Craiu, M., Roşculeţ, M. *Culegere de probleme de analiză matematică*, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1976.
7. Cotoranu, A. *Contribuţii asupra optimizării tonajelor şi vitezelor trenurilor în condiţiile exploatării CFR*. Teză de doctorat, IPB, 1973.
8. Dano Sven. *Nonlinear and dynamic programming*. Wien, Springer Verlag, 1975.
9. Donciu, N. ş.a. *Algebră şi analiză matematică*, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1967.
10. Dragomirescu, M., Maliţa, M. *Programare neliniară*. Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1972.
11. Duffin, R. ş.a. *Geometric programming*, John Wiley, 1967.
12. Dumitru, V. *Programare neliniară*. Bucureşti, Editura academiei R.S.R., 1975.

13. Forray, M. *Calculul variational în ştiinţă şi tehnică*. Bucureşti, Editura tehnică, 1975-
14. Gâdea, S., Protopopescu, M. *Aliaje neferoase*, Bucureşti, Editura tehnică, 1963.
15. Hăngănuţ, M. ş.a. *Programe* FORTRAN *comentate în automatică*, Bucureşti, Editura tehnică, 1974.
16. Henning Tolle. *Optimization methods*. Springer Verlag, 1975.
17. Krasnov, M. ş.a. *Variaţionnoe iscislenie*. Moscova, Nauka, 1973.
18. Marusciac, I. *Metode de rezolvare a problemelor de programare neliniară*. Cluj-Napoca, Editura Dacia, 1973.
19. Marusciac, L. *Programare geometrică şi aplicaţii*. Cluj-Napoca, Editura Dacia, 1978.
20. McShane, E. *The Lagrange multiplier rule*. Math. Monthly, 80, 8, 1973, 922—925.
21. Milnor, J. *Morse theory*. Princeton Univ. Press, 1963.
22. Nădejde, I. ş.a. *Probleme de cercetare operaţională*. Bucureşti, Editura Academiei R.S.R., 1971.
23. Nicolescu, M. ş.a. *Manual de analiză matematică*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1966.
24. Olariu, V. *Analiză matematică şi matematici speciale*. Bucureşti, Litografia IPB, 1978.
25. Poston, T., Stewart, I. *Catastrophe theory and its applications*. Pitman, 1977.
26. Rockaffellar, R. *Convex analysis*. Princeton Univ. Press, 1970.
27. Sireţchi, Gh. *Culegere de probleme de analiză matematică*. Litografia Univ. Bucureşti, 1975.
28. Tănăsescu, E. *Distribuţia temperaturii într-o atmosferă stelară gri*. St. cerc. ast. 18, 2, Bucureşti, 1973, 209—212.
29. Teodorescu, N., Olariu, V. *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, vol. I şi II. Bucureşti, Editura tehnică, 1978, 1980.
30. Teodorescu, N. ş.a. *Culegeri de probleme*. SSM, Bucureşti, 1977.
31. Udrişte, C., Bucur, C.M. *Probleme de matematică şi observaţii metodologice*. Timişoara, Editura Facla, 1980.
32. Udrişte, C. *Analiză matematică*, Bucureşti, Litografia IPB, 1978.
33. Voinea, R. ş.a. *Mecanică*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1975.
34. Vrănceanu, Gh., Mititelu, Şt. *Probleme de cercetare operaţională*. Bucureşti, Editura tehnică, 1978.
35. Woodcock, A., Poston, T. *A geometrical study of the elementary catastrophes*. Berlin, Springer-Verlag, 1973.
36. Preda, M., Cristea, P. *Probleme de electricitate pentru examenele de bacalaureat şi admitere în învăţământul superior*. Bucureşti, Editura tehnică, 1978.
37. Mihu, Cerchez, *Aplicaţii ale matematicii în practică*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1975.

1

PROBLEME ELEMENTARE
DE
MINIM SAU MAXIM

Numeroase probleme de matematică, fizică, astrofizică, precum şi cele ce prezintă un interes deosebit în activitatea practică şi anume în construcţii, transporturi, industrie sau agricultură, operează cu mărimi variabile pentru care în anumite condiţii se cere să se afle cea mai mică sau cea mai mare valoare, de exemplu: minimul sau maximul unei lungimi variabile, unei arii variabile, unui volum variabil, unei forţe variabile sau, mai general, unei cantităţi variabile.

Problemele de minim sau maxim sînt printre cele mai frumoase şi interesante probleme abordate de matematică. O parte din acestea pot fi soluţionate elementar, dar cele mai multe necesită cunoştinţe solide din teoria optimizării funcţiilor.

1.1. Minimul sau maximul trinomului de gradul al doilea

Fie trinomul real $P(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a \neq 0$. Forma canonică $P(x) = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{cantitate variabilă}} + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}_{\text{cantitate constantă}}\right]$ arată că funcţia $x \to P(x)$ îşi atinge valorile extreme odată cu funcţia $x \to \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Astfel, pentru $x = -\frac{b}{2a}$, $a > 0$, se obţine un minim $\frac{4ac - b^2}{4a}$, iar pentru $x = -\frac{b}{2a}$, $a < 0$, se obţine un maxim $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

1.1. Pe laturile dreptunghiului $ABCD$, cu $AB = a$ şi $BC = b$, sînt luate punctele M, N, P, Q astfel ca $AM = BN = CP = DQ = x$. Să se afle minimul ariei paralelogramului $MNPQ$ cînd x variază.

Rezolvare. Aria paralelogramului $MNPQ$ se poate exprima ca diferenţa dintre aria dreptunghiului $ABCD$ şi suma ariilor triunghiurilor QAM, MBN, NCP şi PDQ din fig. 1.1; aria $(MNPQ)$ = aria $(ABCD)$ − 2 aria (QAM) − 2 aria $(MBN) = ab - x(b - x) - x(a - x)$, $x \in [0, r]$, unde $r = \min\{a, b\}$. Fără a scădea generalitatea putem presupune $b < a$ şi problema se reduce la cercetarea minimului restricţiei trinomului $P(x) = 2x^2 - (a + b)x + ab$ la $[0, b]$. Pentru $a \leqslant 3b$ găsim $x_{\min} = \dfrac{a + b}{4}$ şi $\min\limits_x P(x) = P(x_{\min}) = \dfrac{8ab - (a + b)^2}{8}$.

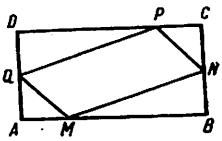


Fig. 1.1

1.2. Diferenţa a două numere reale este λ. Care sînt aceste numere dacă produsul lor este minim?

Rezolvare. Fie x şi $\lambda + x$ cele două numere; produsul lor $P(x) = x^2 + \lambda x$ este minim pentru $x = -\lambda/2$. Astfel, numerele căutate sînt $-\lambda/2$ şi $\lambda/2$.

1.3. Să se afle mulţimea valorilor funcţiei $f: \mathbb{R}\setminus\{0, 4\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{(1 + x)^2}{4x - x^2}$ şi să se precizeze punctele de extrem local ale lui f.

Rezolvare. Notînd pe $f(x)$ cu y şi eliminînd numitorul, obţinem ecuaţia de gradul doi $1 + y)x^2 + 2(1 - 2y)x + 1 = 0$. Deoarece $x \in \mathbb{R}\setminus\{0, 4\}$, se impune condiţia $\Delta = (1 - 2y)^2 - 1 - y = 4y^2 - 5y \geqslant 0$, care este îndeplinită pentru $y \in (-\infty, 0] \cup [5/4, \infty)$; aşadar $f(x) \leqslant 0$ sau $f(x) \geqslant 5/4$, astfel încît $x = -1$ este un punct de maxim local al lui f şi $f_{\max} = f(-1) = 0$ iar $x = 2/3$ este un punct de minim local şi $f_{\min} = f(2/3) = 5/4$.

Observaţie. Metoda precedentă poate fi întrebuinţată pentru aflarea mulţimii valorilor oricărei funcţii reale de forma $x \to f(x) = \dfrac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ şi pentru precizarea punctelor de extrem.

1.4. Pe o axă dată se consideră n puncte fixe $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de abscise $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectiv. Să se determine pe această axă un punct M de abscisă x astfel ca suma $\overline{MM_1}^2 + \overline{MM_2}^2 + \ldots + \overline{MM_n}^2$ să fie minimă.

Rezolvare. Problema pusă revine la găsirea punctului de minim al trinomului $x \to P(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 = nx^2 - 2x\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$. Evident acesta este $x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Mai general, minimul unei expresii de forma $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{MM_i}^2$ se realizează pentru $x = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$.

1.2. Maximul produsului pentru sumă constantă

Fie două mărimi variabile a căror sumă este constantă. Maximul produsului celor două mărimi este atins numai atunci cînd factorii sînt egali.

Pentru soluţie notăm cu x_1 şi x_2 cele două mărimi şi deci $x_1 + x_2 = S$ (const), $x_1 - x_2 = \lambda$ (variabil). Se observă că $x_1 = \frac{S}{2} + \frac{\lambda}{2}$, $x_2 = \frac{S}{2} - \frac{\lambda}{2}$ şi deci produsul $P = x_1x_2 = \frac{S^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4}$ creşte (descreşte) cînd $|\lambda|$ descreşte (creşte). Deoarece x_1, x_2 sînt numere reale arbitrare, produsul P este maxim dacă şi numai dacă $\lambda = 0$, adică $x_1 = x_2 = S/2$.

Ca o consecinţă, pentru orice $x \neq y$ avem $\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \geqslant xy$, deoarece în ambii membri ai inegalităţii suma celor doi factori este aceeaşi, $x + y$, însă în membrul întîi factorii sînt egali.

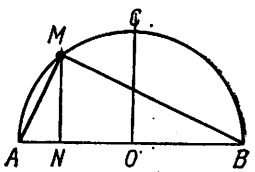


Fig. 1.2

Vom da şi o justificare geometrică. Fie N un punct arbitrar pe diametrul AB al unui semicerc (fig. 1.2). Avem $AN + NB = 2R = \text{const}$. Pe de altă parte, aplicînd teorema înălţimii în triunghiul dreptunghic AMB, obţinem $MN^2 = AN \cdot NB$, de unde rezultă că produsul $AN \cdot NB$ este maxim cînd MN este maxim. Aceasta se întîmplă cînd M ajunge în punctul C, iar N în punctul O, adică $NM = R$ şi $AN = NB = R$.

Rezultatul precedent se poate generaliza în felul următor: dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt n numere reale pozitive a căror sumă $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$ este constantă, atunci maximul produsului $P = x_1x_2 \ldots x_n$ este atins numai cînd toţi factorii devin egali. Această afirmaţie se poate justifica în felul următor. Fie $(x_{10}, x_{20} \ldots, x_{n0})$ soluţia (1.1), cu coordonate distincte, a ecuaţiei $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$. Din (1.1) se pot construi alte $n - 1$ soluţii

$$\left(\frac{x_{10} + x_{20}}{2}, \frac{x_{10} + x_{20}}{2}, x_{30}, \ldots, x_{n0}\right), \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{2\,\frac{x_{10} + x_{20}}{2} + x_{30}}{3}, \frac{2\,\frac{x_{10} + x_{20}}{2} + x_{30}}{3}, \frac{2\,\frac{x_{10} + x_{20}}{2} + x_{30}}{3}, x_{40}, \ldots, x_{n0}\right) \tag{1.3}$$

şi analog după acest model se pot scrie şi celelalte soluţii care au respectiv cel puţin patru coordonate egale, cinci coordonate egale etc. Fie P_i valoarea produsului P corespunzătoare coordonatelor soluţiei (1.i). Se observă că $P_n > P_{n-1} > \ldots > P_3 > P_2 > P_1$ şi orice altă soluţie a ecua-

ţiei $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$ dă pentru produs o valoare cel mult egală cu $P_n = \left(\frac{S}{n}\right)^n$.

1.5. Dintre toate dreptunghiurile de acelaşi perimetru p, pătratul are aria maximă.

Într-adevăr, dacă L este lungimea, iar l lăţimea unui dreptunghi, atunci $L + l = \frac{1}{2} p$ (const) şi deci $\max A = \max (Ll) = \frac{1}{16} p^2$, valoare atinsă numai pentru $L = l = p/4$. Analog, dintre toate paralelipipedele cu suma lungimilor tuturor muchiilor constantă, cubul are volumul maxim.

1.6. Două forţe concurente f_1 şi f_2 ale căror direcţii fac un unghi de 60° au mărimi variabile cu suma de 2 N. Să se găsească aceste forţe astfel încît rezultanta lor să aibă mărimea minimă.

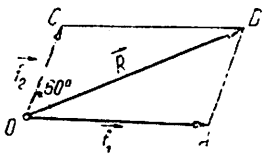


Fig. 1.3

Rezolvare. Din ΔOBC (fig. 1.3) şi din $f_1 + f_2 = 2$ N obţinem $R^2 = f_1^2 + f_2^2 - 2f_1f_2 \cos 120° = f_1^2 + f_2^2 + f_1f_2 = 4 - f_1f_2$, astfel încît mărimea rezultantei este minimă cînd produsul f_1f_2 este maxim şi aceasta are loc pentru $f_1 = f_2 = 1$ N.

1.7. Să se afle maximul funcţiei reale $x \to f(x) = (24 - 6x + x^2)(4 + 6x - x^2)$.

Rezolvare. Se observă că suma factorilor $24 - 6x + x^2$ şi $4 + 6x - x^2$ este 28, deci constantă, iar ecuaţia $24 - 6x + x^2 = 4 + 6x - x^2$ are rădăcini complexe. Însă maximul lui $f(x)$ este atins odată cu minimul modulului diferenţei dintre cei doi factori, $d(x) = 2(x^2 - 6x + 10) = 2[(x - 3)^2 + 1]$. Deoarece $\min_x d(x) = d(3) = 2$, rezultă $\max_x f(x) = f(3) = 195$.

1.8. Să se determine maximul funcţiei

$$x \to f(x) = (3x - 1)(4 - 2x)(1 - x), \quad x \in (1/3, 1).$$

Rezolvare. Expresia $f(x)$ este produsul a trei cantităţi pozitive cu suma constantă şi egală cu 4. Pe de altă parte sistemul $3x - 1 = 4 - 2x = 1 - x$ este incompatibil. De aceea pentru găsirea soluţiei se procedează astfel: $f(x)$ se înmulţeşte cu constantele λ, μ, aranjîndu-le convenabil în partea dreaptă; $\lambda\mu f(x) = (3\lambda x - \lambda)(4\mu - 2\mu x)(1 - x)$ şi suma expresiilor din cele trei paranteze, $(3\lambda - 2\mu - 1)x + 4\mu - \lambda + 1$, este constantă dacă $3\lambda - 2\mu - 1 = 0$; din $\lambda(3x - 1) = \mu(4 - 2x) = 1 - x$ rezultă $\lambda = \frac{1 - x}{3x - 1}$, $\mu = \frac{1 - x}{2(2 - x)}$ şi înlocuind în $3\lambda - 2\mu - 1 = 0$, găsim ecuaţia $9x^2 - 20x + 9 = 0$ cu soluţia acceptabilă $x_1 = \frac{10 - \sqrt{19}}{9} \approx 0{,}62$. Acesta este punctul de maxim global al lui f şi $\max f(x) = f\left(\frac{10 - \sqrt{19}}{9}\right) \approx f(0{,}62) \approx 4{,}43$.

1.9. *Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt numere reale pozitive cu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$ (const) şi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sînt numere raţionale pozitive date, atunci produsul $P = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}$ este maxim numai cînd $\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \ldots = \frac{x_n}{r_n}$.*

Mai intîi presupunem că $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sînt numere naturale şi observăm că P este maxim în acelaşi timp cu produsul $\underbrace{\frac{x_1}{r_1}\cdots\frac{x_1}{r_1}}_{r_1 \text{ factori}} \cdot \underbrace{\frac{x_2}{r_2}\cdots\frac{x_2}{r_2}}_{r_2 \text{ factori}} \cdots \underbrace{\frac{x_n}{r_n}\cdots\frac{x_n}{r_n}}_{r_n \text{ factori}}$; dar acesta din urmă are suma factorilor egală cu S (const) şi deci îşi atinge maximul numai dacă toţi factorii săi devin egali, $\frac{x_1}{r_1} = \ldots = \frac{x_n}{r_n}$.

Dacă $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sînt numere raţionale pozitive, problema se reduce la cazul precedent, deoarece P este maxim odată cu P^m $(m > 0)$ şi este suficient să luăm m=c.m.m.m.c. al numitorilor fracţiilor $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

1.10. Dintr-un trunchi de copac cilindric de rază r să se taie o grindă de secţiune dreptunghiulară, astfel încît să se elimine cît mai puţin material şi grinda să aibă rezistenţa maximă.

Rezolvare. Din mecanică se ştie că rezistenţa grinzii este proporţională cu lăţimea $2x$ şi cu pătratul înălţimii secţiunii $2y$. Astfel problema se reduce la găsirea maximului funcţiei reale $R = axy^2$, cu restricţia $x^2 + y^2 = r^2$, sau găsirea maximului lui $x \to R(x) = ax(r^2 - x^2)$. Ultima funcţie îşi atinge maximul odată cu pătratul ei $R^2(x) = a^2x^2(r^2 - x^2)^2$. Deoarece suma factorilor x^2 şi $r^2 - x^2$ este constantă, punctul de maxim este soluţia ecuaţiei $\frac{x^2}{1} = \frac{r^2 - x^2}{2}$, deci $x = \frac{r\sqrt{3}}{3}$ şi $y = \frac{r\sqrt{6}}{3}$. Întrucît soluţia problemei nu conţine constanta a, înseamnă că nu depinde de calitatea materialului.

Procedeul de construire a dreptunghiului de rezistenţă maximă este următorul. Fie cercul cu diametrul $AC = 2r$ (fig. 1.4) pe care-l împărţim în trei părţi egale; prin punctele M şi N de diviziune ridicăm perpendiculare pe diametrul AC, care vor întîlni cercul în punctele B şi D, care unite cu extremităţile diametrului AC formează dreptunghiul de rezistenţă maximă. Într-adevăr, AB fiind media proporţională între ipotenuza AC şi segmentul AM, înseamnă că $AB = \sqrt{AC \cdot \frac{AC}{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = 2x$, iar înălţimea fiind media proporţională între ipotenuză şi segmentul MC, rezultă $h = \sqrt{AC \cdot \frac{2AC}{3}} = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{6}}{3} = 2y$.

1.11. Să se determine cilindrul de volum maxim care se poate înscrie într-un con dat.

Rezolvare. Fie r, h respectiv raza şi înălţimea conului şi x, y respectiv raza şi înălţimea cilindrului (fig. 1.5). Se observă că $V = \pi x^2 y$. În plus $\Delta OGC \sim \Delta OHB$ implică legătura $\frac{h-y}{h} = \frac{x}{r}$, adică $x = \frac{r}{h}(h-y)$. De aceea, avem de determinat maximul volumului $V = \frac{\pi r^2}{h^2} y(h-y)^2$. Deoarece $(h-y) + y = h$ (const), acest maxim este atins numai cînd $\frac{h-y}{2} = \frac{y}{1}$ şi deci $y = h/3$. Rezultă $x = \frac{2r}{3}$ şi $V_{cil} = \frac{4\pi r^2}{9} \cdot \frac{h}{3} = \frac{4}{9} V_{con}$.

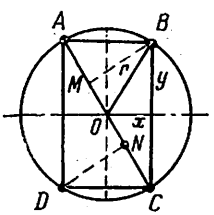


Fig. 1.4

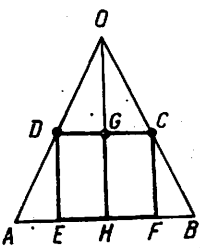


Fig. 1.5

1.3. Minimul sumei pentru produs constant

Fie n numere reale pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru care $x_1 x_2 \ldots x_n = P$ (const); *suma $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ este minimă numai cînd $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$.*

Dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$, atunci $S = n\sqrt[n]{P}$. Să presupunem că ar exista o valoare $\min S = S_0 < n\sqrt[n]{P}$, valoarea S_0 fiind atinsă de exemplu pentru $x_{10} = x_{20} = \ldots = x_{n0} = \frac{1}{n} S_0$. Rezultă că produsul $x_{10}x_{20} \ldots x_{n0} = \left(\frac{1}{n} S_0\right)^n < P$, ceea ce este absurd deoarece produsul este prin ipoteză constant. Analog se arată că $\min S$ nu poate fi mai mare decît $n\sqrt[n]{P}$, rămînînd deci singurul caz posibil $\min S = n\sqrt[n]{P}$, valoare atinsă numai pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$.

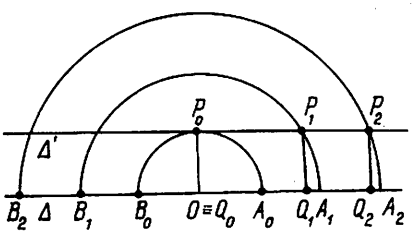


Fig. 1.6

Pentru a justifica geometric afirmaţia precedentă, se ia un fascicul de semicercuri concentrice avînd centrul O (fig. 1.6) şi diametrele pe o dreaptă Δ. Notăm cu Δ' o paralelă la Δ care intersectează semicercurile. Aplicînd teorema înălţimii în triunghiul dreptunghic $A_iP_iB_i$, deducem $Q_iP_i^2 = B_iQ_i \cdot Q_iA_i = c^2$ (const). Lungimea (sumă) $B_iQ_i + Q_iA_i = B_iA_i$, variabilă în raport cu i, este minimă cînd punctul P_i coincide cu P_0 (semicercul devine tangent dreptei Δ'); în acest şi numai în acest caz $O = Q_0$ şi deci $B_0O = OA_0$.

1.12. Dintre toate dreptunghiurile de arie dată pătratul are perimetrul minim.

Într-adevăr, dacă L este lungimea şi l este lăţimea unui dreptunghi, atunci, în ipoteza $L \cdot l = \text{const}$, suma $L + l$ este minimă dacă şi numai dacă $L = l$. Mai general, dintre toate paralelipipedele de volum dat cubul are suma lungimilor tuturor muchiilor minimă.

1.13. O bară de lungime dată, cu secţiunea dreptunghiulară de arie constantă, trebuie prelucrată la freză (pe toate feţele) şi apoi nichelată. Să se determine dimensiunile secţiunii astfel încît costul celor două operaţii (frezare şi nichelare) să fie minim.

Rezolvare. Costul este proporţional cu perimetrul secţiunii, $C = 2k(x + y)l$, unde l este lungimea barei, k este costul pe unitatea de suprafaţă, iar x şi y dimensiunile secţiunii dreptunghiulare. Trebuie găsit minimul funcţiei $C = \mu(x+y)$, ştiind că $xy = a > 0$. Minimul lui C se realizează pentru $x = y = \sqrt{a}$ şi deci $\min C = 4kl\sqrt{a}$.

P r e c i z a r e. Dacă situaţia concretă nu va permite valori egale pentru x şi y, atunci acestea se vor alege astfel încît modulul diferenţei, $|x - y|$ să fie cît mai mic posibil.

1.14. Să se afle minimul funcţiei definite pe $(0, \pi/2)$ prin $f(x) = a^2 \operatorname{tg} x + b^2 \operatorname{ctg} x$, $a, b \neq 0$.

Rezolvare. Deoarece $a^2 \operatorname{tg} x \cdot b^2 \operatorname{ctg} x = a^2 b^2$ (const), suma $f(x)$ va fi minimă numai cînd $a^2 \operatorname{tg} x = b^2 \operatorname{ctg} x$, adică $\operatorname{tg} x = \left|\frac{b}{a}\right|$ sau $x = \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$. Deci $\min\limits_x f(x) = a^2\left|\frac{b}{a}\right| + b^2\left|\frac{a}{b}\right| = 2|ab|$.

1.15. Se dau $N = 64$ surse identice, fiecare cu o t.e.m. $E = 1{,}2$V şi o rezistenţă internă $r = 0{,}8\ \Omega$, cu care se formează un circuit serie-paralel, din n_s grupe inseriate, fiecare grupă fiind formată din n_p surse legate în paralel, astfel încît $n_s \cdot n_p = N$. Să se determine valorile n_s şi n_p pentru care: a) bateria de surse găsită să dea o putere maximă unui rezistor cu rezistenţa $R = 3{,}2\ \Omega$, conectat la bornele ei; b) se cere rezistenţa rezistorului căruia bateria formată să-i poată da cea mai mare putere.

Rezolvare. a) Puterea primită de un rezistor cu rezistenţă R are expresia $P = RI^2$ şi şi atinge valoarea maximă cînd I îşi atinge maximul. Deci problema revine la a determina maximul curentului I, care se obţine înlocuind bateria cu o sursă echivalentă cu t.e.m. $E_e = n_s \cdot E$ şi rezistenţa internă $r_i = \frac{n_s}{n_p} \cdot r$, încît expresia lui I devine

$$I = \frac{n_s E}{\frac{n_s}{n_p} r + R} = \frac{E}{\frac{r}{n_p} + \frac{R}{n_s}},$$

care va fi maximă cînd numitorul va fi minim. Pe de altă parte, se ştie că pentru două mărimi variabile de produs constant suma este minimă cînd cele două mărimi sînt egale, adică $\frac{r}{n_p} = \frac{R}{n_s}$. Din această relaţie şi din relaţia dată în enunţ $n_s n_p = N$ se obţin valorile $n_s = \sqrt{N\frac{R}{r}}$ şi $n_p = \sqrt{N\frac{r}{R}}$ pentru care curentul I, deci şi puterea P sînt maxime, $P_{max} = R I_{max}^2 = R\frac{n_s^2 E^2}{(2R)^2} = \frac{NE^2}{4r}$. Pentru valorile numerice din enunţ rezultă $n_s = 16$, $n_p = 4$, $P_{max} = 28{,}8$ W.

b) Pentru o conexiune dată a surselor cu n_p grupe în paralel, fiecare grupă fiind formată din n_s surse în serie, puterea dată unui rezistor cu rezistenţa R este maximă cînd rezistenţa are valoarea $R = \frac{n_s}{n_p} r$, puterea maximă avînd valoarea $P_{max} = \frac{NE^2}{4r}$ şi fiind independentă de n_s şi n_p. În funcţie de n_s şi n_p se modifică însă rezistenţa R, care corespunde lui P_{max}. Astfel, pentru valorile numerice date în enunţ, puterea maximă se realizează la oricare din următoarele valori date lui R:

$$\frac{64}{1} r,\ \frac{32}{2} r,\ \frac{16}{4} r,\ \frac{8}{8} r,\ \frac{4}{16} r,\ \frac{2}{32} r,\ \frac{1}{64} r.$$

În oricare din aceste cazuri randamentul est $\eta = 50\%$ şi deci puterea maximă pentru fieare sursă este aceeaşi avînd valoarea $P_{\text{sursă}} = \frac{E^2}{4r}$ şi de asemenea curenţii surselor sînt aceiaşi şi anume $I_{\text{sursă}} = \frac{E}{2r}$.

1.4. Inegalităţi dintre media aritmetică, media geometrică şi media armonică

Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Între media lor aritmetică, media geometrică şi media armonică au loc relaţiile

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

egalităţile avînd loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Într-adevăr, notînd $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$, conform justificărilor din 1.2 rezultă $a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant \underbrace{\frac{S}{n} \cdot \frac{S}{n} \ldots \frac{S}{n}}_{n \text{ factori}}$, relaţie care este echivalentă cu inegalitatea dintre media geometrică şi media aritmetică. Analog, notînd $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = P$ şi ţinînd seama de 1.3, deducem

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{1}{P} + \frac{1}{P} + \ldots + \frac{1}{P} = \frac{n}{P},$$

iar aceasta nu este altceva decît inegalitatea dintre media geometrică şi media armonică. Relaţia dintre media aritmetică şi cea armonică apare ca o consecinţă directă a relaţiilor deduse, ţinînd seama de proprietatea de tranzitivitate a relaţiei de ordine, dar aceasta se poate deduce şi direct, pornind de la inegalitatea evidentă $\sum_{i=1}^{n} \left(x\sqrt{a_i} + \frac{1}{\sqrt{a_i}} \right)^2 \geqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, trinomul $x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i + 2nx + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ este pozitiv, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, dacă si numai dacă $n^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant 0$, adică $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$.

1.16. Să se determine condiţiile în care se realizează minimul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^r + bx^{-r} + c$, unde $a, b, c > 0$.

Rezolvare. Se observă că $f(x) = ax^r + bx^{-r} + c \geqslant 3\sqrt[3]{(ax^r)(bx^{-r})c} = 3\sqrt[3]{abc}$. Valoarea $3\sqrt[3]{abc}$ este atinsă numai dacă $ax^r = bx^{-r} = c$; rezultă $ab = c^2$ și $x = \left(\frac{c}{a}\right)^{1/r}$.

1.17. Știind că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variază în intervalul $[0, \pi/2)$, să se găsească valoarea maximă a sumei inverselor celor C_n^j sume formate, luînd cîte j numere odată dintre numerele sec x_1, sec x_2, ..., sec x_n.

Rezolvare. Deoarece $0 < \cos x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, deducem $\frac{1}{\sec x_1} + \frac{1}{\sec x_2} + \ldots + \frac{1}{\sec x_n} = \cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n \leqslant n$. Apoi, inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică

$$\frac{\sec x_1 + \ldots + \sec x_j}{j} \geqslant \frac{j}{\frac{1}{\sec x_1} + \ldots + \frac{1}{\sec x_j}}$$

implică

$$\frac{1}{\sec x_1 + \ldots + \sec x_j} \leqslant \frac{1}{j^2}(\cos x_1 + \ldots + \cos x_j),$$

egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $\cos x_1 = \ldots = \cos x_j$, adică dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_j$.

Inegalități analoage au loc pentru oricare j numere dintre numerele date. Sumînd cele C_n^j inegalități, deducem

$$\sum \frac{1}{\sec x_{i_1} + \ldots + \sec x_{i_j}} \leqslant \frac{1}{j^2} C_{n-1}^{j-1} \sum_{i=1}^{n} \cos x_i = \frac{n}{j^2} C_{n-1}^{j-1},$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

1.5. Minime și maxime trigonometrice și geometrice

1. *Fie $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ măsurile în radiani a două unghiuri variabile. Dacă $x_1 + x_2 = S = \text{const} \leqslant \pi$, produsul sinusurilor, $P = \sin x_1 \cdot \sin x_2$ este maxim numai cînd unghiurile devin egale.*

Într-adevăr, se observă că $P = \sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2}[\cos(x_1 - x_2) - \cos S]$ și deci maximul lui P are loc odată cu maximul lui $\cos(x_1 - x_2)$. Pe de altă parte, $\cos(x_1 - x_2) = 1$ este echivalentă cu $x_1 = x_2$, deoarece $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, implicînd $\max P = \frac{1}{2}(1 - \cos S) = \sin^2 \frac{S}{2}$.

Drept consecință imediată a acestor considerente avem: dacă $a + b \leqslant \pi$, $a \neq b$, atunci $\sin a \cdot \sin b < \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a+b}{2}$.

Proprietatea precedentă se poate generaliza. Într-adevăr, se poate arăta că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \pi]$ şi $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S = \text{const} \leqslant \pi$, atunci produsul $P = \sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n$ este maxim numai cînd $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (dacă acest lucru este posibil).

2. *Fie $x_1, x_2 \in [0, \pi)$ măsurile în radiani a două unghiuri variabile. Dacă $x_1 + x_2 = S = \text{const} < \pi/2$, atunci $P = \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2$ îşi atinge maximul numai cînd $x_1 = x_2$.* Pentru a justifica această afirmaţie pornim de la faptul că $P = \dfrac{\sin x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2} = \dfrac{\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)}{\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)} = 1 - \dfrac{2\cos S}{\cos S + \cos(x_1 - x_2)}$ şi deci P este maxim dacă şi numai dacă $\cos(x_1 - x_2) = 1$, adică $x_1 = x_2$.

Observaţii. 1. Dacă $x_1 + x_2 = \pi/2$, atunci $\operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 = \operatorname{tg} x_1 \operatorname{ctg} x_1 = 1$.

2. Proprietatea se poate generaliza pentru un număr finit de unghiuri a căror sumă constantă să fie cel mult $\pi/2$.

1.18. Se dă $E = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, unde α, β, γ sînt măsurile în radiani ale unghiurilor unui triunghi oarecare. Să se determine triunghiul pentru care E are valoarea maximă.

Rezolvare. Prin ipoteză $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ şi $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Pe de altă parte $E = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \times \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \gamma\right) = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \gamma\right)\right] = 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \times \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

Evident $\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{\beta+\gamma}{2}, \dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ sînt unghiuri din $(0, \pi)$ cu suma constantă π. Condiţiile $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\beta+\gamma}{2} = \dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ implică $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ şi deci $\max E = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ este atins numai pentru triunghiul echilateral.

1.19. Dintre toate triunghiurile ce se pot circumscrie unui cerc de rază r, să se determine triunghiul de arie minimă.

Rezolvare. Aria unui triunghi ABC circumscris unui cerc de rază r are expresia

$$S = \frac{r^2}{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}}.$$

Se observă că S este minimă cînd numitorul este maxim şi aceasta se întîmplă pentru $\dfrac{A}{2} = \dfrac{B}{2} = \dfrac{C}{2}$, deoarece $\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. Rezultă $A = B = C$, deci triunghiul echilateral cu aria minimă $S = 3r^2\sqrt{3}$.

1.20. Dintre toate patrulaterele convexe ce se pot forma cu patru segmente date, cel inscriptibil (dacă există) are aria maximă.

Rezolvare. Aria unui patrulater $ABCD$ de laturi $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ se exprimă prin $S = \frac{ad \sin A}{2} + \frac{bc \sin C}{2}$. Pe de altă parte, teorema cosinusului conduce la $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$. Notînd $\varphi = A + C$, din sistemul

$$2ad \sin A + 2bc \sin C = 4S,$$

$$2ad \cos A - 2bc \cos C = a^2 + d^2 - b^2 - c^2,$$

prin ridicare la pătrat și adunare, găsim

$$4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd \cos \varphi = 16S^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2.$$

Această egalitate definește pe S ca funcție de φ. Înlocuind $\cos \varphi = 2\cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1$ și notînd $a + b + c + d = 2p$, obținem

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Astfel S^2 este maxim dacă și numai dacă $\varphi = \pi$, adică $ABCD$ este un patrulater inscriptibil; $\max\limits_{\varphi} S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$.

1.21. Într-un plan vertical dat, deasupra orizontalei, se consideră un cerc Γ și un punct A, cercul Γ fiind tangent orizontalei iar punctul A fiind exterior cercului. O particulă ținută în repaus în A este lăsată să alunece fără frecare pe o dreaptă AB, $B \in \Gamma$, pînă atinge cercul. Să se determine poziția punctului B astfel încît timpul de parcurgere a segmentului AB să fie un extrem (se presupune că forța gravitațională este constantă și că nu există efecte relativiste).

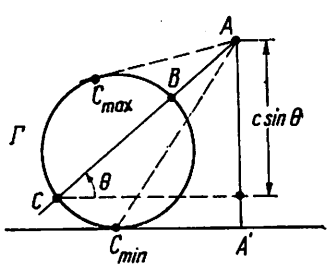


Fig. 1.7

Rezolvare. Presupunem că A este situat la dreapta lui Γ, avînd cota mai mare decît diametrul cercului (fig. 1.7) și notăm cu C punctul în care dreapta AB întîlnește a doua oară cercul. Fie $AB = b$, $AC = c$ și θ unghiul de înclinare a dreptei AB; produsul bc este constant în raport cu θ deoarece reprezintă puterea punctului A în raport cu Γ. Pătratul timpului de coborîre este proporțional cu $\frac{b}{\sin\theta}$ și deci cu $\frac{1}{c \sin\theta}$. De aceea timpul este minim cînd $c \sin\theta$ este maxim, situație realizată dacă C este punctul de tangență C_{min} dintre orizontală și cercul Γ; timpul este maxim cînd $c \sin \theta$ este minim, adică C este punctul de tangență C_{max}, care determină poziția punctului B.

Celelalte cazuri referitoare la poziția lui A față de Γ se soluționează analog.

1.6. Probleme propuse

1.1. Pe două drepte perpendiculare Ox şi Oy se mişcă două puncte materiale A şi B, cu vitezele constante v_1 şi v_2, plecînd în acelaşi timp de la distanţele d_1 şi d_2 de originea O şi apropiindu-se de acest punct. Să se afle minimul distanţei dintre aceste puncte.

Indicaţie. $A'B'^2 = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(d_1v_1 + d_2v_2)t + d_1^2 + d_2^2$ şi se găseşte $A'B'_{\min} = \frac{d_1v_2 - d_2v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$ pentru $t = \frac{d_1v_1 + d_2v_2}{v_1^2 + v_2^2}$.

1.2. Să se determine extremele funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 5}{2x^2 - 3x + 4}$.

Indicaţie. Notăm $y = f(x)$ şi impunem ca trinomul $(3 - 2y)x^2 - (5 - 3y)x + 5 - 4y = 0$ să aibă rădăcini reale şi diferite. Din $\Delta \geqslant 0$ rezultă $y \in \left[1, \frac{35}{23}\right]$ care implică $f_{\max} = \frac{35}{23}$ pentru $x = -5$ şi $f_{\min} = 1$ pentru $x = -6$.

1.3. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se determine un punct M pe mediana AA', astfel ca expresia $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie minimă.

Indicaţie. Problema revine la aflarea valorii minime a trinomului $3x^2 - 2m_ax + m_a^2 + \frac{a^2}{2}$.

1.4. Să se arate că maximul funcţiei $f : \mathbb{R}\setminus\{5\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2\,\frac{x^2 - 12x + 24}{(x - 5)^2}$ este egal cu 24/11 şi este realizat pentru $x = -6$.

1.5. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{-1, 3\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x^2 + mx}{x^2 - 2x - 3}$ admite un maxim şi un minim numai cînd parametrul real m variază în intervalul $(-3, 1)$.

1.6. Fie m şi n două numere naturale astfel încît $m + n = c$ (const). Să se afle cea mai mică valoare a expresiei $E = m^2 + n^2$.

R. $E_{\min} = c^2/2$.

1.7. Fie $x > 1$. 1) Să se determine $a > 1$ astfel încît $a \log_a x$ să fie minim. 2) Să se găsească numărul întreg $a > 1$ astfel încît $a \log_a x$ să fie minim. 3) Pentru care întreg $a > 1$ este minim $(a + 1)\log_a x$?

R. $a = e$, $a = 3$, $a = 4$.

1.8. Fie C_n^k numărul combinărilor de n obiecte luate cîte k. Pentru n fix, să se determine valorile k pentru care C_n^k devine maxim.

R. Partea întreagă a lui $n/2$.

1.9. Să se arate că pentru orice valori strict pozitive ale lui x şi y, $x + y + \frac{1}{xy} \geqslant 3$. Cînd este semnul egal?

Indicaţie. Se aplică inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică.

1.10. Ţinînd seama că suma dintre orice număr strict pozitiv şi inversul său este $\geqslant 2$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{(x_1^2 + x_1 + 1)(x_2^2 + x_2 + 1) \ldots (x_n^2 + x_n + 1)}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant 3^n.$$

1.11. Să se arate că pentru orice x real avem

$$\left| \frac{x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} \right| \leqslant \frac{1}{4}, \quad \left| \frac{x(1 - x^2)(x^4 - 6x^2 + 1)}{(1 + x^2)^4} \right| \leqslant \frac{1}{8}.$$

Indicaţie. Se notează $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1.12. Să se calculeze minimul funcţiei $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x$.

R. $f_{\min} = 2\sqrt{3}$ pentru $x = \pi/3$.

1.13. Să se găsească maximul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^{2p} x \cos^{2q} x$ (p, q fiind numere naturale).

R. $f_{\max} = \frac{p^p \cdot q^q}{(p + q)^{p+q}}$ pentru $x = \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

1.14. Să se arate că în orice triunghi

$$\cos A \cos B \cos C \leqslant \frac{1}{8}, \quad \cos A \sin B \sin C \geqslant -\frac{1}{8}.$$

1.15. Să se determine conul circular drept astfel ca: 1) să fie înscris într-o sferă de rază R şi să aibă a) suprafaţa totală maximă; b) volumul maxim; 2) să fie circumscris unei sfere de rază r şi să aibă a) suprafaţa laterală minimă; b) volumul minim; 3) să aibă generatoarea dată

G și volumul maxim; 4) să fie de volum dat și să aibă suprafața laterală minimă.

R. 1) a) $h_{con} = \frac{23 - \sqrt{17}}{16} R$, $S_{max} = \frac{\pi R^2}{128} (51\sqrt{17} + 107)$; b) $r_{con} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$, $V_{max} = \frac{32\pi R^3}{81}$. 2) a) $h_{con} = r(2 + \sqrt{2})$, $S_{min} = \pi r^2 \sqrt{2}\,(\sqrt{2} + 1)$, b) $h = 4r$, $V_{min} = \frac{8\pi r^3}{3}$ (deci înălțimea conului este dublul diametrului sferei, volumul este dublul volumului sferei și aria totală a acestui con este dublul ariei sferei). 3) $r_{con} = \frac{G\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $V_{max} = \frac{2\pi G^3}{9\sqrt{3}}$. 4) Dacă $V = \frac{\pi a^3}{3} = \text{const}$, atunci $r_{con} = \frac{a}{\sqrt[6]{2}}$, $S_{min} = \pi a^2 \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$.

2

EXTREMELE FUNCŢIILOR REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

2.1. Mulţimi mărginite

Fie A o submulţime nevidă a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Se spune că A este *minorată* dacă există un număr $a \in \mathbb{R}$ astfel încît, oricare ar fi $x \in A$, $x \geqslant a$. Numărul real a se numeşte *minorant* pentru mulţimea A.

Analog se spune că mulţimea A este *majorată* dacă există un număr $b \in \mathbb{R}$ astfel încît, oricare ar fi $x \in A$, $x \leqslant b$. Numărul real b se numeşte *majorant* pentru mulţimea A.

O mulţime care este concomitent minorată şi majorată se numeşte mulţime *mărginită*. Altfel spus, o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ este minorată (majorată) dacă şi numai dacă există o semidreaptă mărginită la stînga (la dreapta) care conţine mulţimea şi este mărginită dacă şi numai dacă există un interval mărginit, închis sau nu, care să o conţină.

Teoremă. *O mulţime A de numere reale este mărginită dacă şi numai dacă există un număr $r > 0$, astfel încît $|x| \leqslant r$, oricare ar fi $x \in A$.*

Demonstraţie. Presupunem că A este mărginită. Aceasta înseamnă că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încît $a \leqslant x \leqslant b$, $\forall x \in A$. Notînd $r = \max\{|a|, |b|\}$, avem $-r \leqslant a \leqslant b \leqslant r$ şi deci $-r \leqslant x \leqslant r$, adică $|x| \leqslant r$. Implicaţia inversă este imediată deoarece r este un majorant iar $-r$ este un minorant pentru mulţimea A.

Evident, minorantul şi majorantul unei mulţimi nu sînt unice, pentru că dacă a este un minorant, atunci $\forall y \in \mathbb{R}$, $y < a$ este minorant pentru mulţimea A şi de asemenea, dacă b este un majorant, atunci $\forall z \in \mathbb{R}$, $z > b$ este majorant pentru A.

Dacă există un minorant al lui A care aparţine lui A, atunci acesta se numeşte *minimul lui A* şi se notează prin $\min\limits_{x \in A} x$ sau $\min A$. Minimul

unei mulţimi (dacă există) este unic datorită proprietăţii de antisimetrie a relaţiei de ordine. Analog se defineşte noţiunea de maxim pentru care se utilizează notaţiile $\max\limits_{x \in A} x$ sau $\max A$.

Fie A o mulţime minorată din $\mathbb{R}$. Dacă mulţimea minoranţilor lui A admite un maxim, atunci acest maxim se numeşte *marginea inferioară* a lui A şi se notează $\inf\limits_{x \in A} x$ sau $\inf A$, unde inf se citeşte „infimum".

Teoremă. *Un număr real m este marginea inferioară a lui A dacă şi numai dacă*: 1) $\forall x \in A$, $x \geqslant m$, 2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$, *astfel încît* $x_0 < m + \varepsilon$.

Demonstraţie. Fie $m = \inf A$. Aceasta înseamnă că m este cel mai mare minorant al lui A şi deci 1) şi 2) sînt satisfăcute.

Reciproc, dacă numărul m satisface condiţiile 1) şi 2), atunci să arătăm că el este cel mai mare minorant. Raţionăm prin absurd şi presupunem că ar exista un alt minorant $m' > m$; atunci pentru $\varepsilon = m' - m$ există $x_0 \in A$ astfel încît $x_0 < m + \varepsilon = m + (m' - m) = m'$, adică m' n-ar fi un minorant al lui A, ceea ce este contradictoriu. Rămîne că $m' \leqslant m$ şi deci $m = \inf A$.

Analog se defineşte *marginea superioară* pentru care se utilizează notaţiile $\sup\limits_{x \in A} x$ sau $\sup A$, unde sup se citeşte „*supremum*". *Un număr M este marginea superioară a lui A dacă şi numai dacă*: 1) $\forall x \in A$, $x \leqslant M$, 2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$, *astfel încît* $M - \varepsilon < x_0$.

Axioma marginii. *Orice mulţime nevidă şi minorantă, de numere reale, admite o margine inferioară* (sau *orice mulţime nevidă şi majorată admite o margine superioară*).

Marginile lui A pot să aparţină sau nu mulţimii A. De exemplu mulţimea $A = \{x \mid x \leqslant 1\}$ admite pe $1 \in A$ drept margine superioară, iar mulţimea $A = \{x \mid x > 2\}$ admite pe $2 \notin A$ drept margine inferioară.

Dacă A este mărginită, atunci $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$, $\forall x \in A$, egalitatea $\inf A = \sup A$ putînd să aibă loc dacă şi numai dacă A este formată dintr-un singur element.

Dacă A este o mulţime închisă şi mărginită, atunci marginile lui A aparţin mulţimii A, fiind respectiv minimul şi maximul lui A.

Exemplu. Fie $A = \left\{x_n = 1 - \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$. Să determinăm inf A şi sup A.

Se observă că şirul cu termenul general $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ este crescător şi convergent la 1. Marginea inferioară a lui A este 0, deoarece $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 0$ şi $\forall \varepsilon > 0$ există termenul $x_1 = 0$ astfel încît $x_1 < 0 + \varepsilon$. Deci $\inf A = \min A = x_1 \in A$. Marginea superioară a lui A este 1, deoarece $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < 1$ şi $\forall \varepsilon > 0$, există cel puţin un n pentru care $x_n > 1 - \varepsilon$ şi anume $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Deci $\sup A = 1 \notin A$.

C o m p l e m e n t e. Dacă A nu este minorată, atunci se spune că marginea ei inferioară este $-\infty$. Se scrie $\inf A = -\infty$ şi prin definiţie se pune $x > -\infty$ pentru orice număr real x.

Analog, dacă A nu este majorată, atunci se spune că marginea ei superioară este $+\infty$ (sau pe scurt ∞). Se scrie $\sup A = +\infty$ şi se acceptă că $x < +\infty$ pentru orice număr real x.

Acceptînd utlimele două definiţii, se obţine următoarea formulare unitară: orice mulţime de numere reale A are o margine inferioară m şi o margine superioară M (finite sau infinite). De asemenea, cu convenţia $-\infty < \infty$, întotdeauna $\inf A \leqslant \sup A$, egalitatea avînd loc dacă şi numai dacă mulţimea A este formată dintr-un singur element.

Ultimele trei convenţii extind structura de ordine de la $\mathbb{R}$ la dreapta încheiată $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

2.1. Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale a şi b $(a \neq b)$, au loc egalităţile:

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |b - a|), \quad \max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |b - a|).$$

Rezolvare. Fie $a < b$. Avem $\min\{a,b\} = a$ şi $|b - a| = b - a$. De aceea $\frac{1}{2}(a + b - |b - a|) = \frac{1}{2}(a + b - (b - a)) = a$. Relaţia a doua se dovedeşte analog.

2.2. Să se arate că pentru oricare trei numere reale a, b, c avem $\min\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\}$.

Rezolvare. Se observă că relaţia este simetrică în b şi c. De aceea este suficient ca aceasta să fie verificată pentru $a \leqslant b \leqslant c$, $b \leqslant c \leqslant a$ şi $c \leqslant a \leqslant b$.

Fie $a \leqslant b \leqslant c$. Rezultă $\max\{b, c\} = c$, $\min\{a, c\} = a$, $\min\{a, b\} = a$, $\min\{a, c\} = a$ şi $\max\{a\} = a$. Analog se verifică şi celelalte două posibilităţi.

2.3. Dacă A şi B sînt două submulţimi nevide din $\mathbb{R}$, atunci să se arate că $A \subset B$ implică $\inf B \leqslant \inf A$ şi $\sup A \leqslant \sup B$.

Rezolvare. Să dovedim relaţia $\sup A \leqslant \sup B$ în ipoteza că mulţimea B este mărginită; evident A este mărginită. Fie $a = \sup A$, $b = \sup B$. Dacă $a > b$, atunci pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$ va exista $x_0 \in A$ astfel încît $x_0 > a - \varepsilon = \frac{a + b}{2} > b$; deoarece $x_0 > b$, rezultă $x_0 \notin B$ deşi $x_0 \in A$, ceea ce contrazice incluziunea $A \subset B$, rămînînd adevărată $a \leqslant b$.

2.4. Fie A şi B două mulţimi mărginite de numere reale. Să se arate că $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$, $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Rezolavre. Prin ipoteză A şi B sînt minorate; notăm $a = \inf A$, $b = \inf B$. Dacă $a < b$, atunci $\min\{\inf A, \inf B\} = a$, $A \subset [a, \infty)$, $B \subset [b, \infty) \subset [a, \infty)$, $A \cup B \subset [a, \infty)$ şi $\inf(A \cup B) = a$, adică relaţia $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$ este verificată. Pentru cealaltă relaţie se procedează analog.

2.5. Fie A o mulțime de numere reale. 1) Notînd $-A = \{-x \mid x \in A\}$, să se arate că $\inf(-A) = -\sup A$, $\sup(-A) = -\inf A$.

2) Notînd $\frac{1}{A} = \left\{\frac{1}{x} \,\middle|\, x \in A\right\}$, să se stabilească relațiile $\inf A = \frac{1}{\sup \frac{1}{A}}$, $\sup A = \frac{1}{\inf \frac{1}{A}}$. $\left(\text{Convenții}: \frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0 \text{ și condiția } \inf A > 0.\right)$

Rezolvare. 1) Pentru simplificare considerăm A mărginită. Fie $\sup A = a$, adică: $\forall x \in A$, $x \leqslant a$ și $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$ astfel încît $x_0 > a - \varepsilon$. Rezultă $-x \geqslant -a$ și $-x_0 < -a + \varepsilon$, adică $\inf(-A) = -a = -\sup A$.

Pentru relația a doua observăm că $\inf A = \inf(-(-A)) = -\sup(-A)$. Să dovedim egalitatea $\inf A = \frac{1}{\sup \frac{1}{A}}$. Presupunem $\inf A = a \in (0, \infty)$; aceasta înseamnă că $\forall x \in A$, $x \geqslant a$ și $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$ astfel încît $x_0 < a + \varepsilon$. Rezultă $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{a}$ și $\frac{1}{x_0} > \frac{1}{a+\varepsilon} > \frac{1}{a} - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > \max\left\{0, \frac{1}{a} - a\right\}$. De aceea $\sup \frac{1}{A} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\inf A}$.

2.6. Fie A și B două mulțimi de numere reale. Să se arate că:

1) dacă A și B sînt minorate, atunci $\inf\{x + y \mid x \in A, y \in B\} = \inf A + \inf B$;

2) dacă A și B sînt majorate, atunci $\sup\{x + y \mid x \in A, y \in B\} = \sup A + \sup B$.

Rezolvare. Se demonstrăm relația 2). Evident $x + y \leqslant \sup A + \sup B$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$. Deci $\sup C \leqslant \sup A + \sup B$, unde $C = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Dar există $x \in A$ și $y \in B$ astfel încît $x \geqslant \sup A - \varepsilon$, $y \geqslant \sup B - \varepsilon$. Deci $x + y \geqslant \sup A + \sup B - 2\varepsilon$, de unde $\sup C \geqslant \sup A + \sup B - 2\varepsilon$. Astfel, $0 \leqslant \sup A + \sup B - \sup C \leqslant 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, adică $\sup A + \sup B = \sup C$.

2.7. Fie A și B două mulțimi de numere reale pozitive. Să se demonstreze că 1) dacă A și B sînt minorate, atunci $\inf\{xy \mid x \in A, y \in B\} = (\inf A)(\inf B)$;

2) dacă A și B sînt majorate, atunci $\sup\{xy \mid x \in A, y \in B\} = (\sup A)(\sup B)$.

Rezolvare. Să demonstrăm prima relație. Deoarece $xy \geqslant (\inf A)(\inf B)$, $\forall x \in A$ și $\forall y \in B$, deducem $\inf C \geqslant (\inf A)(\inf B)$, unde $C = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$. Pe de altă parte, $\forall \varepsilon > 0$, există $x \in A$ și $y \in B$ astfel încît $x \leqslant \inf A + \varepsilon$, $y \leqslant \inf B + \varepsilon$. De aici rezultă $xy \leqslant (\inf A)(\inf B) + \varepsilon(\inf A + \inf B + \varepsilon)$ și deci $\inf C \leqslant (\inf A)(\inf B) + \varepsilon(\inf A + \inf B + \varepsilon)$, sau, altfel scris,

$$0 \leqslant \inf C - (\inf A)(\inf B) \leqslant \varepsilon(\inf A + \inf B + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0.$$

Ținînd seama că singurul număr nenegativ mai mic decît orice număr pozitiv este numărul zero, găsim $\inf C = (\inf A).(\inf B)$.

2.2. Valori extreme ale funcţiilor reale

Fie E o submulţime a mulţimii numerelor reale, funcţia $f: E \to \mathbb{R}$ şi $G(f) = \{(x, f(x) | x \in E\} \subset \mathbb{R}^2$ graficul lui f. Funcţia f este minorată, majorată sau mărginită dacă mulţimea $f(E)$ are respectiv aceste proprietăţi. Cu alte cuvinte, f se numeşte:

1) *minorată*, dacă există un număr $m \in \mathbb{R}$ astfel încît $m \leqslant f(x)$, $\forall x \in E$; echivalent, graficul $G(f)$ se află deasupra dreptei $y = m$;

2) *majorată*, dacă există un număr $M \in \mathbb{R}$ astfel încît $f(x) \leqslant M$, $\forall x \in E$; echivalent, $G(f)$ se află sub dreapta $y = M$;

3) *mărginită*, dacă există două numere $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încît $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in E$; echivalent, $G(f)$ se află între dreptele $y = m$, $y = M$ sau încă, dacă există $r > 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant r$, $\forall x \in E$.

Teoremă. *Dacă $f: E \to \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in E$, atunci există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încît restricţia $f: V \cap E \to \mathbb{R}$ să fie mărginită.*

Demonstraţie. Fie $U = \left(\frac{-1}{10} + f(x_0), \frac{1}{10} + f(x_0)\right)$ o vecinătate a lui $f(x_0)$; atunci din continuitatea funcţiei, pentru $\varepsilon = \frac{1}{10}$, se găseşte o vecinătate a lui x_0 de forma $V = \left(-\delta\left(\frac{1}{10}\right) + x_0, \delta\left(\frac{1}{10}\right) + x_0\right)$, astfel încît, $\forall x \in E \cap V$, valorile corespunzătoare $f(x) \in U$, deci f este mărginită.

Considerăm din nou $f: E \to \mathbb{R}$. În ipoteza că există, infimumul sau supremumul (marginile) mulţimii $f(E)$ se numesc *infimumul* sau *supremumul* (*marginile*) lui f, iar în loc de notaţiile $\inf f(E)$, $\sup f(E)$ se folosesc $\inf\limits_{x \in E} f(x)$, $\sup\limits_{x \in E} f(x)$, sau, mai scurt, $\inf\limits_{x} f(x)$, $\sup\limits_{x} f(x)$. Numărul $\underline{f} = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ este caracterizat prin două proprietăţi:

1) $\underline{f} \leqslant f(x)$, $\forall x \in E$;

2) $\forall \varepsilon > 0$, există $x_0 \in E$ astfel încît $f(x_0) < \underline{f} + \varepsilon$

Analog, $\bar{f} = \sup\limits_{x \in E} f(x)$ dacă şi numai dacă:

1) $f(x) \leqslant \bar{f}$, $\forall x \in E$;

2) $\forall \varepsilon > 0$ există $x_0 \in E$ astfel încît $f(x_0) > \bar{f} - \varepsilon$. Evident $\inf\limits_{x \in E} f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in E} f(x)$, egalitatea avînd loc dacă şi numai dacă f este constantă pe E.

Se observă că funcţia f este minorată dacă şi numai dacă $-f$ este majorată şi $\inf\limits_{x \in E} f(x) = -\sup\limits_{x \in E} (-f(x))$. De asemenea, f este majorată dacă şi numai dacă $-f$ este minorată şi $\sup\limits_{x \in E} f(x) = -\inf\limits_{x \in E} (-f(x))$. Mai mult, pentru funcţiile mărginite sînt adevărate următoarele afirmaţii:

1) Dacă $f: E \to \mathbb{R}$ este mărginită şi dacă $F \subset E$, atunci

$$\inf_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{x \in F} f(x), \quad \sup_{x \in F} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} f(x).$$

2) Dacă $f, g: E \to \mathbb{R}$ sînt mărginite şi dacă $f \leqslant g$, atunci

$$\inf_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{x \in E} g(x) \quad \sup_{x \in E} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} g(x).$$

3) Dacă $f, g: E \to \mathbb{R}$ sînt mărginite, atunci

$$\inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x) \leqslant \inf_{x \in E} (f(x) + g(x)), \quad \sup_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in E} (f(x) + g(x)), \quad \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x) \geqslant \sup_{x \in E} (f(x) + g(x)).$$

4) Dacă $f, g: E \to \mathbb{R}$ sînt mărginite şi $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, atunci

$$\sup_{x \in E} (f(x)\, g(x)) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) \cdot \sup_{x \in E} g(x),$$

$$\sup_{x \in E} f(x) \cdot \inf_{x \in E} g(x) \leqslant \sup_{x \in E} (f(x) g(x)).$$

5) Dacă $f: E \to \mathbb{R}$ este mărginită şi $\inf_{x \in E} f(x) > 0$, atunci

$$\frac{1}{\inf_{x \in E} f(x)} = \sup_{x \in E} \frac{1}{f(x)}.$$

Fie $f: E \to \mathbb{R}$. Minimul (sau maximul) lui $f(E)$, dacă există, se numeşte *minimul (sau maximul) global al lui f*, iar punctele din E în care sînt atinse aceste valori se numesc *puncte de minim (sau maxim) global*. De aceea notaţiile $\min f(E)$, $\max f(E)$ sau $\min_{x \in E} f(x)$, $\max_{x \in E} f(x)$ sau $\min_x f(x)$, $\max_x f(x)$ au respectiv aceeaşi semnificaţie.

Teoremă. *O funcţie continuă pe un interval închis este mărginită şi îşi atinge marginile (are un minim şi un maxim).*

Demonstraţie. Presupunem că $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă. Să arătăm că f este majorată, adică există un M astfel încît $f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$. Presupunem contrariul; atunci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ putem găsi $x_n \in [a, b]$ aşa ca $f(x_n) = n$. Deoarece şirul $\{x_n\}$ este mărginit, conform teoremei lui Weierstrass-Bolzano, el are un punct limită x_0. Pe de altă parte, continuitatea în x_0 implică $|f(x_n)| - |f(x_0)| \leqslant |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ (fie $\varepsilon = 1$), deci $n = |f(x_n)| \leqslant 1 + |f(x_0)|$, care pentru n suficient de mare este o contradicţie. Deci f este majorată.

Fie $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Să arătăm că există un punct $c \in [a, b]$ astfel încît $M = f(c)$, adică M este maximul global al lui f pe $[a, b]$. Presupunem

prin absurd că această situaţie nu are loc. Din definiţia marginii superioare rezultă $f(x) < M$, $\forall x \in [a, b]$. Considerăm funcţia auxiliară definită prin $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$, $x \in [a, b]$. Evident φ este continuă pe $[a, b]$ şi deci mărginită. Pe de altă parte, din proprietăţile marginii superioare, există valori ale lui x astfel încît $M - \varepsilon < f(x)$, $\forall \varepsilon > 0$. Deci $\varphi(x) > 1/\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, adică φ nu ar fi mărginită, ceea ce este contradictoriu; înseamnă că există $c \in [a, b]$ aşa că $f(c) = \sup\limits_{x \in [a, b]} f(x)$. Se demonstrează analog că există $d \in [a, b]$ astfel încît $f(d) = \inf\limits_{x \in [a, b]} f(x)$.

Fie $f: E \to \mathbb{R}$. Un punct $x_0 \in E$ se numeşte punct de *minim* (*maxim*) *local* pentru f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $f(x) \geqslant (\leqslant) f(x_0)$, $\forall x \in V \cap E$. Valoarea $f(x_0)$ se numeşte *minim* (respectiv maxim) *local* (fig. 2.1).

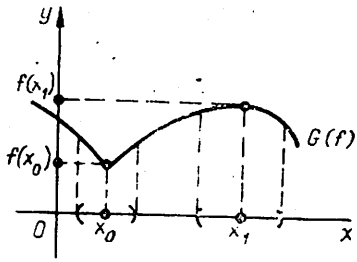


Fig. 2.1

Teoremă. *Fie x_0 un punct interior al mulţimii E în care funcţia f este continuă. Dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît f să fie descrescătoare (crescătoare) la stînga lui x_0 şi crescătoare (descrescătoare) la dreapta lui x_0, atunci x_0 este un punct de minim (maxim) local al funcţiei f.*

Demonstraţie. Fie $V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervalul cu proprietatea că $f: (x_0 - \varepsilon, x_0) \to \mathbb{R}$ este descrescătoare şi $f: (x_0, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ este crescătoare. Ţinînd seama şi de continuitatea lui f în punctul x_0, rezultă $f(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) \leqslant f(x)$ pentru $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ şi $f(x) \geqslant \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$ pentru $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Astfel, pentru orice $x \in V$ avem $f(x) \geqslant f(x_0)$ şi deci x_0 este un punct de minim local. Cazul maximului se tratează analog.

Punctele de minim sau maxim se mai numesc *puncte de extrem*, iar minimul sau maximul se mai numesc *extreme* sau *valori optime*; cînd este cazul, lîngă acestea se adaugă atributul „*local*" sau „*global*".

Punctul x_0 este un punct de minim pentru f dacă şi numai dacă el este un punct de maxim pentru $-f$.

Evident, extremele globale sînt şi locale, reciproca nefiind adevărată.

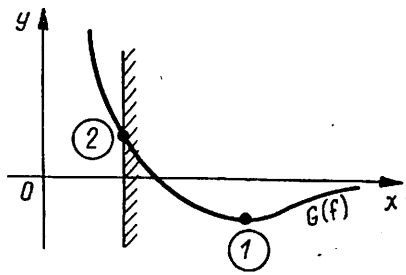


Fig. 2.2

Dacă mulţimea $f(E)$ este o mulţime închisă, atunci infimumul şi supremumul lui f, dacă există, coincid respectiv cu extremele globale ale lui f.

În cazul în care găsirea extremului lui f se referă la o submulțime a lui E, atunci se spune că avem *o problemă de extrem cu restricții*; de exemplu pentru funcția al cărui grafic este dat în fig. 2.2, în absența oricărei restricții valoarea ① este minimul funcției, iar dacă se impune o margine superioară pentru x, atunci minimul funcției este ②.

Complemente. 1) Fie $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție reală. Dacă f nu este minorată pe E, atunci prin definiție $\inf\limits_{x \in E} f(x) = -\infty$; analog, dacă f nu este majorată pe E, atunci $\sup\limits_{x \in E} f(x) = +\infty$. În ambele situații funcția f se numește *nemărginită*.

2) Un punct $x_0 \in E$ se numește *punct de minim (maxim) local strict* al lui f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $f(x) > (<) f(x_0)$, $\forall x \in V \cap E$, $x \neq x_0$. Valoarea $f(x_0)$ se numește *minim (maxim) local strict*. Dacă $V \cap E = E$, atunci atributul *„local"* trebuie înlocuit cu *„global"*.

Dacă $f: E \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci mulțimile $A = \{x \mid x \in E, x =$ punct de minim strict local$\}$ și $B = \{x \mid x \in E, x =$ punct de maxim strict global$\}$ sînt cel mult numărabile. Mai mult, fiind date două mulțimi cel mult numărabile și disjuncte, există o funcție diferențiabilă f, care are derivată mărginită și pentru care A este mulțimea punctelor de minim strict local, iar B este mulțimea punctelor de maxim strict local.

2.8. Să se determine extremele funcției $x \to f(x) = \arccos \dfrac{1}{x} + \sqrt{1-x^2}$.

Rezolvare. Mulțimea de definiție a lui f este discretă și finită: $\{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\} \cap [-1,1] = \{-1,1\}$. Deci, $f: \{-1,1\} \to \{0, \pi\}$ astfel încît $\inf\limits_{x \in E} f(x) = \min\limits_{x \in E} f(x) = f(1) = 0$ și $\sup\limits_{x \in E} f(x) = \max\limits_{x \in E} f(x) = f(-1) = \pi$.

Observație. Pentru o funcție reală, definită pe o mulțime formată doar din puncte izolate, prezintă interes numai problema extremelor globale.

2.9. Fie A o submulțime din $\mathbb{R}$. O funcție $f: A \to \mathbb{R}$ se numește *lipschitziană* dacă $\exists k > 0$ astfel încît

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|, \quad \forall x, y \in A.$$

Să se arate că dacă A este mărginită și $f: A \to \mathbb{R}$ este lipschitziană, atunci f este mărginită.

Rezolvare. Prin ipoteză există un număr $M > 0$ astfel încît $|x| \leqslant M$ și dacă fixăm $y = x_0$, atunci

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leqslant k|x - x_0| + |f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant k(|x| + |x_0|) + |f(x_0)| \leqslant k(M + |x_0|) + |f(x_0)|, \ \forall x \in A.$$

ceea ce dovedește că f este mărginită.

2.10. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că fiecare punct al domeniului de definiţie este un punct de minim local pentru f. Să se arate că $f(\mathbb{R})$ este o mulţime numărabilă.

Rezolvare. Prin ipoteză $f(x) \geqslant f(y)$, $\forall x \in V_y$ şi $f(y) \geqslant f(x)$, $\forall y \in V_x$. Acestea implică $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in V_x \cap V_y$; de aceea f se reduce la constante pe subintervale, iar într-un capăt de interval trebuie să ia drept valoare minimul dintre valoarea la stînga şi valoarea la dreapta. Ţinînd seama şi de faptul că orice acoperire a lui $\mathbb{R}$ este inclusă într-una numărabilă suficient de fină (reuniune de intervale cu extremităţi raţionale), rezultă că f este o funcţie în scară şi deci $f(\mathbb{R})$ este numărabilă.

2.11. Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. 1) Dacă f nu este monotonă, atunci ea posedă cel puţin un extrem local. 2) Dacă x_0 este un punct de extrem pentru f, atunci x_0 este un punct de extrem şi pentru $|f|$. Reciproca nu este adevărată.

Rezolvare. 1) Presupunem că f nu este monotonă, adică există $a, b \in I$, $a < b$, astfel încît $f(x)$ nu este cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$ pentru cel puţin un punct $x \in (a, b)$. Restricţia lui f la $[a, b]$ este o funcţie continuă şi deci admite un maxim şi un minim. Cel puţin unul dintre acestea se atinge într-un punct din (a, b) şi deci este un extrem local al lui f.

2) Există o vecinătate a lui x_0 impusă de definiţia punctului de extrem şi de proprietăţile modulului astfel încît din faptul că $f(x) - f(x_0)$ păstrează semn constant să rezulte că şi $|f(x)| - |f(x_0)|$ păstrează semn constant, pe vecinătatea respectivă.

2.12. Să se determine extremele locale ale funcţiei

$$x \to f(x) = \begin{cases} \min\left\{x^3, \dfrac{1}{x}\right\}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Utilizînd graficele funcţiilor $x \to x^3$, $x \to 1/x$ trasate în raport cu acelaşi sistem de axe, găsim

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x\ (-\infty, -1] \cup (0, 1], \\ 1/x, & x \in (-1, 0) \cup [1, \infty), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Se observă că $x = -1$ este un punct de continuitate, iar f este crescătoare pe $(-\infty, -1)$ şi descrescătoare pe $(-1, 0)$. De aceea $x = -1$ este un punct de maxim local şi $\max\limits_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = f(-1) = -1$. Analog, $x = 1$ este un punct de maxim local şi $\max\limits_{x \in (0, \infty)} f(x) = 1$, iar $x = 0$ este un punct de minim local şi $\min\limits_{x \in [0, \infty)} f(x) = 0$.

2.13. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$, unde a şi b sînt constante pozitive. Să se găsească $\min\limits_x f(x)$.

Rezolvare. Utilizînd inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică găsim $f(x) = \dfrac{1}{2}(2ax) + \dfrac{1}{2}(2b/x) \geqslant (2ax)^{1/2}\left(\dfrac{2b}{x}\right)^{1/2} = 2\sqrt{ab}$. Pe de altă parte, $f\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) = 2\sqrt{ab}$ şi deci $\min\limits_x f(x) = 2\sqrt{ab}$.

2.14. Să se determine punctele de minim şi de maxim ale funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = a \cos x + b \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Rezolvare. Scriem pe $f(x)$ în forma echivalentă

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x\right)$$

şi observăm că există $\theta \in [0, 2\pi]$, unic, astfel încît

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Rezultă $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}(\sin\theta \cos x + \cos\theta \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + x)$ şi deci $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}$; minimul este atins dacă şi numai dacă $\sin(\theta + x) = -1$, adică $x_{\min} = -\theta + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; maximul este atins dacă şi numai dacă $\sin(\theta + x) = 1$, adică $x_{\max} = -\theta + \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

2.3. Determinarea aproximativă a extremelor unei funcţii. Funcţii unimodale

Fie $f: E \to \mathbb{R}$ o funcţie reală continuă pe porţiuni. Cea mai simplă metodă pentru determinarea aproximativă a extremelor globale ale lui f (numită uneori *metoda reţelei*) constă în următoarele:

— se consideră un interval $[a, b]$ care conţine pe E;

— se împarte intervalul $[a, b]$ în n subintervale egale prin punctele $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $h = (b - a)/n$;

— pentru acei x_i care fac parte din E se calculează valorile $f(x_i)$ şi apoi se compară aceste valori, selectîndu-se extremele.

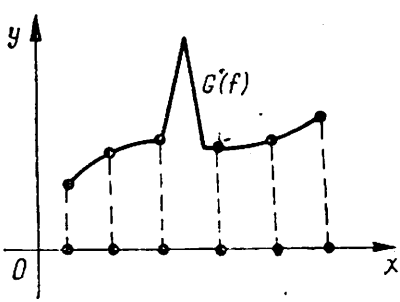


Fig. 2.3

Evident, pentru a putea prinde toate variaţiile semnificative ale lui f se impune ca pasul h să fie suficient de mic; fig. 2.3 dă un contraexemplu şi arată că determinarea extremelor prin metoda reţelei este plină de riscuri şi nu întotdeauna procură cu adevărat punctele de extrem ale funcţiei.

Cu toate acestea vom da un program în versiune FORTRAN IV pentru calcularea valorilor unei funcţii reale pe un interval dat. În programul alcătuit funcţia respectivă intră prin subrutina FUN(X, FX)

în care instrucţiunea precedată de cea cu numărul 30 lasă posibilitatea introducerii oricărei funcţii.

```
      DIMENSION X (100), F(100)
      COMMON NP
      NR = 105
      NW = 108
  100 CONTINUE
      READ (NR, 10, END = 500), N, NP
   10 FORMAT (2I5)
      READ (NR, 20) XO,H
   20 FORMAT (2F10.5)
      WRITE (NW, 25 ) NP
   25 FORMAT (/ / /, 15X, 'PROBLEMA NR. ', · .I2. / / /)
      X(1) = XO
      XX = XO
      CALL FUN (XX, F(1))
      DO 110 I = 2, N
      II = I - 1
      X(I) = X(II) + H
      XX = X(I)
      CALL FUN (XX, F(I))
  110 CONTINUE
      WRITE (NW, 30)
   30 FORMAT (10X, 'PUNCTUL', 10X 'VALOAREA FUNCŢIEI')
      WRITE (NW, 40) X, FX
   40 FORMAT (10X, F7.1, 12X, E14.7)
  130 CONTINUE
      GO TO 100
  500 CONTINUE
      STOP
      END
```

Subrutina care furnizează programului valorile funcţiei este

```
      SUBROUTINE FUN (X, FX)
      COMMON NP
      GO TO (10, 20, 30), NP
   10 CONTINUE
      FX = (X* X*ALOG(X))/2-0,25*X*X-X
      GO TO 100
   20 CONTINUE
      Y = X*X
      Y1 = (cos (Y - 1) + Y)**0,5
      Y2 = (3*Y + 17)**1/3
      FX = Y1/Y2
      GO TO 100
   30 CONTINUE
      FX = . . . . . . . . . . . . . . . .
  100 CONTINUE
      RETURN
      END
```

2.15. Programul a fost aplicat pentru trei funcţii şi anume $f_1 : [1, 3] \to \mathbb{R}$ definită prin $f_1(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 - x$, $f_2 : [0, 5] \to \mathbb{R}$

definită prin $f_2(x) = \dfrac{[\cos(x^2-1)+x^2]^{1/2}}{(3x^2+17)^{1/3}}$ şi $f_3:[20, 35] \to \mathbb{R}$ definită prin $f_3(x) = \left(0{,}005\,x + 100\,\dfrac{20{,}1+2x}{20{,}1+400x}\right)^{1/2}$.

Pentru funcţia $x \to f_1(x)$, intervalul [1, 3] a fost împărţit în 20 de subintervale, luîndu-se $h = 1/10$. Rezultatele obţinute prin rularea programului sugerează că valoarea $-1{,}657785$ poate fi luată drept minimul global al funcţiei f_1, fapt ce se poate verifica utilizînd tabelul de variaţie ataşat lui f_1 (vezi şi problema 2.26).

Pentru funcţia $x \to f_2(x)$, intervalul [0, 5] a fost împărţit în 20 subintervale egale, luîndu-se $h = 1/2$. Valorile obţinute sugerează că $\min f_2(x) = f_2(0) \approx 0{,}2858781$, $\max f_2(x) = f_2(5) \approx 1{,}116934$, rezultate confirmate de tabelul de variaţie pentru f_2 (vezi şi problema 2.26).

Pentru funcţia $x \to f_3(x)$, valorile calculate cu pasul $h = 1$ indică existenţa unui punct de minim local $x \approx 32$, ca valoare minimă aproximativă a funcţiei putînd fi acceptată valoarea 0,903328.

Efortul de căutare a extremelor poate fi redus numai dacă se cunosc mai multe date referitoare la funcţie. De exemplu, dacă f este o funcţie unimodală, atunci se ştie că utilizarea numerelor Fibonacci minimizează efortul de obţinere a optimului.

Fie I un interval deschis inclus într-o mulţime de numere reale E. O funcţie continuă pe porţiuni $f: E \to \mathbb{R}$ se numeşte *unimodală* pe I dacă restricţia $f|I$ are un singur punct de extrem (minim sau maxim). Aceasta înseamnă că o asemenea funcţie este caracterizată prin faptul că fiind date două valori ale variabilei $x_1 < x_2$ din I, situate de aceeaşi parte a punctului de extrem x_{ext}, cea care se găseşte mai aproape de x_{ext} furnizează o valoare mai „bună" pentru funcţie. De aceea ipoteza de unimodalitate permite micşorarea succesivă a intervalului I, numit uneori *interval de incertitudine*, pînă se obţine o încadrare convenabilă a punctului de extrem şi deci evaluarea extremului.

Să ne ocupăm acum în mod special de probleme de minim. În acest caz „valoarea cea mai bună" înseamnă valoarea cea mai mică. De aceea avem implicaţiile $x_1 < x_2 < x_{min} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$; $x_{min} < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Fie $I = (c, d)$ şi $x_1 < x_2$ două puncte din acest interval. Presupunem că f are un singur minim pe I. Dacă $f(x_1) < f(x_2)$, atunci punctul de minim nu se poate găsi la dreapta lui x_2. De aceea $[x_2, d)$ se poate elimina şi astfel găsim un interval de incertitudine mai mic. Dacă $f(x_1) > f(x_2)$, atunci punctul de minim nu poate fi la stînga lui x_1 şi deci $(c, x_1]$ se poate elimina. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci intervalele $(c, x_1]$ şi $[x_2, d)$ pot fi eliminate. Pentru reducerea numărului de calcule se preferă alegerea punctelor astfel încît intervalul redus să conţină unul din punctele iniţiale.

Să presupunem că avem o problemă de minim şi că pentru găsirea punctului de minim se impune să cercetăm valorile lui f în n puncte din intervalul iniţial de incertitudine $I = (c, d)$. Pentru stabilirea celor n puncte se obişnuieşte să se aplice metoda Fibonacci întrucît aceasta nu depinde de f şi conduce la un interval final de incertitudine cît mai mic posibil (minimizează maximul intervalului de incertitudine) cu un număr minim de evaluări ale valorilor funcţiei. Se defineşte pasul $h_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}(d-c)$,

unde $\{a_n\}$ este *şirul lui Fibonacci*, adică şirul definit prin $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$, apoi punem $x_1 = c + h_n$, $x_2 = d - h_n$. Se evaluează $f(x_1)$, $f(x_2)$ şi pe baza ipotezei de unimodalitate se elimină o parte a intervalului (c, d). Rămîne un interval mai scurt, avînd în interior unul din punctele x_1 sau x_2 situat la o anumită distanţă faţă de una din extremităţile intervalului. Se plasează un nou punct la aceeaşi distanţă de cealaltă extremitate şi iarăşi se elimină o parte din interval. Procedeul se repetă pînă cînd controlăm n puncte stabilite după regula enunţată. Dacă (în final) avem suprapunere de puncte, atunci se efectuează mici deplasări.

Deoarece şirul $\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}$ converge rapid către 0,62, în practică putem lua $h_n \approx 0{,}62\ (d - c)$. Cu toate că această aproximare conduce la erori, totuşi după n paşi punctul de minim este conţinut într-un interval care are lungimea aproximativă $l \approx (0{,}62)^n(d - c)$. De aceea este foarte simplu să atingem o acurateţe dorită $l = 10^{-m}(d - c)$; într-adevăr, pentru aceasta este suficient să luăm $n_{\text{Fib}} = -\frac{\ln 10}{\ln 0{,}62} m \approx 5\ m$.

Pentru comparaţie reamintim că în metoda reţelei, dacă impunem $l = 10^{-m}(d - c)$, atunci $nl = d - c$ şi astfel pentru găsirea soluţiei este necesar să afectăm 10^m paşi; deci, în medie, $n_{\text{reţ}} \approx 5 \cdot 10^{m-1}$. Astfel $n_{\text{reţ}} \gg n_{\text{Fib}}$.

2.16. Vom da şi pentru această metodă programul în versiune FORTRAN IV împreună cu rezultatele obţinute pentru cîteva funcţii.

De exemplu pentru funcţia $f_1 : [1,3] \to \mathbb{R}$ definită prin $f_1(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - x$, rularea programului

```
      X1 = 1.
      X2 = 3.
      EPS = 0.001
      AN1 = 1.
      AN2 = 1.
10    CONTINUE
      FX1 = ((X1**2)/2.) * ALOG(X1) - (X1**2)/4.-X1
      FX2 = ((X2**2)/2.)*ALOG (X2) - (X2**2)/4.-X2
      PRINT 20.X1.FX1.X2.FX2
20    FORMAT (5X.'X1 = ',E10.4, 2X, 'FX1 = ', E10.,4, 2X, 'X2 = ', E10.4, 2X, 'FX2 =
     *=E10.4)
      IF(ABS(FX1 - FX2).GT.EPS) GO TO 30
      PRINT 20,XI,FX1, X2, FX2
      STOP
30    AN=AN1 + AN2
      AN2 = AN1
      AN1 = AN
      HN = AN2/AN1*(X2-X1)
      IF(FX1-FX2) 40, 40, 50
40    X2 = X2 - HN
      GO TO 10
50    X1 = X1 + HN
      GO TO 10
      END
```

arată că după şase paşi se poate accepta drept valoare minimă aproximativă valoarea $-1{,}658$, valoare destul de apropiată celei obţinute în metoda reţelei folosind 21 paşi.

Pentru funcţia $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^5 e^{-x^2}}{(x^5+1)^{1/3}}$, rezultatele obţinute arată că punctul de minim este $x=3$ şi că drept valoare minimă a funcţiei, cu precizia impusă, se poate accepta $f_{\min}\approx 0{,}004799$.

Pentru funcţia $g:[30,33]\to\mathbb{R}, g(x)=\left(0{,}005+\dfrac{2010+200\,x}{20{,}1+400\,x}\right)^{1/2}$, găsim punctul de minim $x\approx 31{,}67$ şi $g_{\min}\approx 0{,}9033$.

2.17. O mai bună aproximare a minimului unei funcţii se poate obţine prin următoarea metodă numerică [15]. Se calculează un pas variabil determinat cu ajutorul relaţiei de interpolare

$$\Delta x_n=\frac{1}{2}\,\frac{(\Delta x_{n-1})^2\,\Delta f(x_{n-2})+(\Delta x_{n-2})^2\,\Delta f(x_{n-1})}{(\Delta x_{n-1})\,\Delta f(x_{n-2})-(\Delta x_{n-2})\,\Delta f(x_{n-1})}-\Delta x_{n-1},$$

în care Δx_{n-1} şi Δx_{n-2} sînt paşii determinaţi în iteraţiile anterioare, iar $\Delta f(x_{n-2})=f(x_{n-2})-f(x_{n-1})$.

Dacă funcţia f este o formă pătratică, atunci a doua incrementare conduce la valoarea minimă teoretică. În general, această condiţie nu este îndeplinită şi de aceea incrementarea se aplică de mai multe ori pînă cînd diferenţa absolută dintre două valori succesive ale funcţiei este mai mică decît o valoare impusă ε (ca şi în metoda Fibonacci). Ultima valoare a lui f este acceptată drept minim, care evident depinde de valoarea iniţială x_0.

Aplicînd funcţiei $x\to g(x)$ din 2.16 programul în versiune FORTRAN IV [15] care utilizează subrutina MINIM din biblioteca calculatorului, se obţine $f_{\min}\approx 0{,}9033$ pentru $x\approx 31{,}5708$ cu condiţiile iniţiale $x_0=10$, $\Delta x=1/2$, $\varepsilon=10^{-6}$, rezultat compatibil cu cel obţinut în metoda Fibonacci impunînd aceeaşi precizie.

2.4. Extreme locale ale funcţiilor derivabile

Fie E o mulţime de numere reale şi $f:E\to\mathbb{R}$ o funcţie reală. Reamintim că un punct $x_0\in E$ se numeşte *punct de extrem* (*minim sau maxim*) *local* pentru f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît diferenţa $f(x)-f(x_0)$ să păstreze semn constant pe $V\cap E$; valoarea $f(x_0)$ se numeşte *extrem* (*minim sau maxim*) *local*.

Să presupunem că E este o reuniune de intervale şi $f:E\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe E exceptînd o submulţime cel mult numărabilă de puncte din E. Fie E' submulţimea lui E pe care f este derivabilă. Evident mulţimea E' este în mod necesar o reuniune de intervale deschise.

Teoremă. *Fie x_0 un punct interior al mulțimii E în care f este continuă.*

1) *Dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît derivata f' să aibă semnul $-(+)$ la stînga lui x_0 și semnul $+(-)$ la dreapta lui x_0, atunci x_0 este un punct de minim (maxim) local al funcției f.*

2) *Dacă f' are același semn într-o vecinătate a lui x_0, atunci f nu are extrem în x_0.*

Demonstrație. 1) Fie $V = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ astfel încît $f'(x) \leqslant 0$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0)$ și $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$. Rezultă că f este descrescătoare pe $(x_0 - \varepsilon,\ x_0)$ și crescătoare pe $(x_0,\ x_0 + \varepsilon)$. De aceea x_0 este un punct de minim local și $f(x_0)$ este o valoare minimă locală. Cealaltă alternativă se demonstrează analog.

2) Deoarece f este crescătoare sau descrescătoare pe o vecinătate a lui x_0, punctul x_0 nu poate fi punct de extrem local.

Fie f' derivata lui f pe E'. Zerourile lui f', adică rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$, $x \in E'$, se numesc *puncte critice* ale funcției f.

Teorema lui Fermat. *Dacă $x_0 \in E'$ este un punct de extrem local al funcției f, atunci $f'(x_0) = 0$, adică x_0 este un punct critic pentru f.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in E' \subset E$ un punct de minim local; altfel spus, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît $f(x) \geqslant f(x_0)$, $\forall x \in V \cap E$. Prin ipoteză f este derivabilă în x_0, adică

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

există și este finită. Luînd $x < x_0$, găsim $f'(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, iar pentru $x > x_0$ avem $f'(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, de unde $f'(x_0) = 0$.

Analog se tratează cazul punctului de maxim.

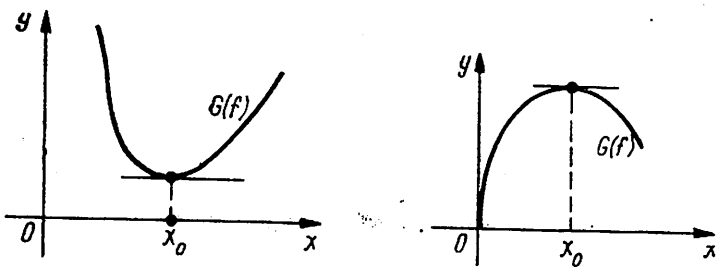


Fig. 2.4

Geometric, teorema lui Fermat arată că dacă graficul funcției f admite tangentă într-un punct de extrem local (interior), atunci tangenta în acest punct la grafic este paralelă cu axa Ox (fig. 2.4).

Analitic, punctele de extrem local din E' ale funcţiei f se află în mod necesar printre rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$, $x \in E'$, adică sînt puncte critice. Din studiul variaţiei unei funcţii reiese că graficul lui f în vecinătatea unui punct critic poate să aibă una din formele date în fig. 2.4, 2.5 sau 2.6.

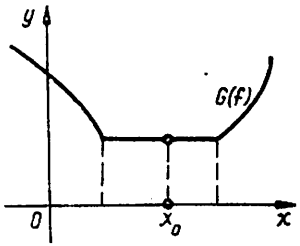


Fig. 2.5

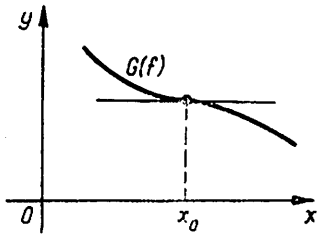


Fig. 2.6

Exemple. 1. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}, \pm \frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2} \right\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^4 - 5x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4 - 5x^2 + 1}}.$$

Derivata ei $f'(x) = \frac{1}{3}\left[(2x^4 - 5x^2 + 1)^{-2/3} - (2x^4 - 5x^2 + 1)^{-4/3}\right](8x^3 - 10x)$ egalată cu zero conduce la ecuaţia

$$(8x^3 - 10x)\,(2x^4 - 5x^2 + 2)\,(2x^4 - 5x^2) = 0$$

cu 11 rădăcini reale, toate puncte de extrem ale lui f şi anume cinci puncte de minim $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_{4,5} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ şi $x_{10,11} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ şi patru puncte de maxim $x_{6,7} = \pm\sqrt{2}$ şi $x_{8,9} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Acest lucru este confirmat de schimbările de semn ale derivatei în tabelul

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		$-\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}$		$-\sqrt{2}$		$-\frac{\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		$\sqrt{2}$		$\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	
		min				max	min		max			min								max	min		max						min	

Minimele locale ale funcţiei f sînt $f_{\min} = f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = f(0) = 2$, şi $f_{\min} = f\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt[8]{17}}{2} + \frac{2}{\sqrt[3]{17}}\right)$ iar maximul local al lui f este $f_{\max} = f(-\sqrt{2}) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f(\sqrt{2}) = -2$.

2. Considerăm funcţia $x \to f(x) = |x-1|^{1-\alpha}\,|x+1|^{1-\alpha}$, unde $\alpha \in (0, 1)$. Deoarece $1-\alpha > 0$, $1+\alpha > 0$, rezultă că f este definită pe $(-\infty, \infty)$.

Explicitînd modulele, putem scrie

$$f(x) = \begin{cases} (-x+1)^{1-\alpha}(-x-1)^{1+\alpha}, & x \in (-\infty, -1], \\ (-x+1)^{1-\alpha}(x+1)^{1+\alpha}, & x \in (-1, 1), \\ (x-1)^{1-\alpha} \quad (x+1)^{1+\alpha}, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Restricțiile lui f la subintervalele ce alcătuiesc domeniul de definiție sînt evident continue. Pe de altă parte $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = f(-1) = 0$, $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = f(1) = 0$. De aceea f este continuă pe $(-\infty, +\infty)$. În plus $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$. Restricția lui f la $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ este derivabilă deoarece este definită prin expresii elementare derivabile:

$$f(x) = \begin{cases} -(1-\alpha)(-x+1)^{-\alpha}(-x-1)^{1+\alpha} - (1+\alpha)(-x-1)^{\alpha}(-x+1)^{1-\alpha}, & x \in (-\infty, -1), \\ -(1-\alpha)(-x+1)^{-\alpha}(x+1)^{1+\alpha} + (1+\alpha)(x+1)^{\alpha}(-x+1)^{1-\alpha}, & x \in (-1, 1), \\ (1-\alpha)(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{1+\alpha} + (1+\alpha)(x+1)^{\alpha}(x-1)^{1-\alpha}, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Observînd că $f'(-1) = 0$, $f'_s(1) = -\infty$, $f'_d(1) = \infty$, rezultă că f este derivabilă pe $(-\infty, -1] \cup [-1, 1) \cup (1, \infty)$.

Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x = -1$ și $x = \alpha$. Vom alcătui următorul tabel de variație:

x	$-\infty$		-1		0		α		1		∞
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	|	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

unde $f(\alpha) = (1-\alpha^2)\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha}$. Graficul lui f are alura din fig. 2.7, punctele critice $x = -1$ și $x = \alpha$ fiind respectiv puncte de minim și maxim local, iar punctul de continuitate $x = 1$ fiind punct de minim local.

Teoremă. *Presupunem că f este o funcție derivabilă de $n \geqslant 2$ ori în $x_0 \in (a, b) \subset E$, astfel încît*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1) Dacă n este *par, atunci x_0 este un punct de extrem local al lui f și anume: dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este un punct de minim; dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci x_0 este un punct de maxim.*

2) *Dacă n este impar, atunci x_0 nu este un punct de extrem; pentru n impar $\geqslant 3$, punctul x_0 este un punct de inflexiune.*

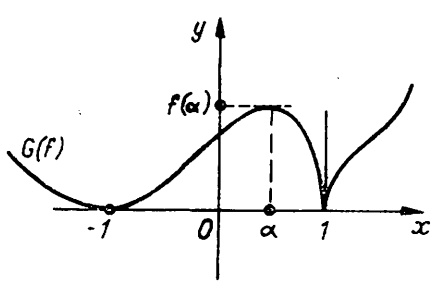


Fig. 2.7

Demonstrație. Se utilizează formula Taylor, scrisă în ipotezele teoremei:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!}[f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)], \text{ unde } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

1) Presupunem n par și $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, există o vecinătate V a lui x_0 pe care $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ păstrează semnul lui $f^{(n)}(x_0)$.

Pe această vecinătate diferența $f(x) - f(x_0)$ are semn constant și deci punctul $x = x_0$ este un punct de extrem local.

2) Dacă n este impar, atunci $(x - x_0)^n$ nu păstrează semn constant. De aceea x_0 nu poate fi punct de extrem.

Presupunem n impar $\geqslant 3$. Notînd $h = f'$, avem

$$h'(x_0) = \ldots = h^{(n-2)}(x_0) = 0, \; h^{(n-1)}(x_0) \neq 0,$$

iar $n - 1$ este par. Rezultă că x_0 este un punct de extrem pentru h, adică $h'(x) = f''(x)$ are semne contrare la stînga și la dreapta lui x_0; deci x_0 este un punct de inflexiune pentru f.

Observație. Punctele de extrem ale funcției f sînt aceleași și pentru funcția e^f deoarece $(e^f)' = f'e^f$ și $(e^f)'' = (f'^2 + f'')\, e^f$.

De asemenea, dacă $f > 0$, punctele de extrem ale lui f sînt aceleași și pentru funcțiile $\ln f$ și $\sqrt{f}$ deoarece $(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$, $(\ln f)'' = \dfrac{ff'' - f'^2}{f^2}$ și $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$, $(\sqrt{f})'' = \dfrac{1}{2}\left[f''f^{-1/2} - \dfrac{1}{2} f'^2 f^{-3/2}\right]$.

Dacă $f \neq 0$, atunci punctele de minim (maxim) ale lui f sînt punctele de maxim (minim) ale funcției $\dfrac{1}{f}$, deoarece $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ și $\left(\dfrac{1}{f}\right)'' = -\dfrac{f''f^2 - 2ff'^2}{f^4}$.

Dacă $f > 0$, punctele de extrem ale funcției f sînt aceleași cu ale funcției f^2, iar dacă $f < 0$, punctele ei de minim (maxim) sînt punctele de maxim (minim) pentru funcția f^2, deoarece $(f^2)' = 2ff'$ și $(f^2)'' = 2(f'^2 + ff'')$.

Exemplu. Să se cerceteze extremele funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$g(x) = \begin{cases} x^n, & x < 0, \\ x^n + e^{-1/x}, & x > 0, \end{cases} \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}.$$

Rezolvare. Funcția g posedă derivate de orice ordin, deoarece este suma a două funcții cu această proprietate. În plus

$$0 = g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = g^{(n+1)}(0) = \ldots; \quad g^{(n)}(0) = n!$$

De aceea, dacă n este par, punctul $x = 0$ este un punct de minim (global), iar dacă n este impar, atunci puncul $x = 0$ este punct de inflexiune.

2.18. Fie M și m extremele locale ale funcției $x \to f(x) = ax^3 + px + q$, $x \in \mathbb{R}$, $ap < 0$. Să se arate ca $Mm = q^2 + \dfrac{4p^3}{27a}$.

(Mat. v škole, 1964)

Rezolvare. Punctele critice ale lui f sînt soluțiile ecuației $f'(x) \equiv 3ax^2 + p = 0$, adică $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{-p}{3a}}$. În plus $f''(x) = 6ax$ și deci $f''(x_{1,2}) = \pm 6a\sqrt{\dfrac{-p}{3a}}$. De aceea $\{M, m\} = \left\{f(x_{1,2}) = \dfrac{2}{3}px_{1,2} + q\right\}$ și $Mm = f(x_1)\cdot f(x_2) = q^2 + \dfrac{4p^3}{27a}$.

2.19. Să se determine parametrii $\theta \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ astfel încît funcțiile reale $x \to f_n(x) = x^n - nx^{n-1}\cos\theta + nx^{n-2}$ să nu aibă extreme locale.

Rezolvare. Fie $n \geq 3$. Deoarece $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă, problema este echivalentă cu determinarea lui θ și n astfel încît $f_n'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dar $f_n'(x) = nx^{n-3}[x^2 - (n-1)x\cos\theta + n - 2]$. De aceea se impune $(n-1)^2\cos^2\theta - 4(n-2) < 0$, adică $|\cos\theta| < \frac{2}{n-1}\sqrt{n-2}$, care este satisfăcută pentru orice $n \geq 3$. Pentru $n = 1$ avem $f_1(x) = x + \frac{1}{x} - n\cos\theta$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ și $f_1 : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ are extreme locale $\forall\theta \in \mathbb{R}$: pentru $n = 2$ găsim $f_2(x) = x^2 - 2x\cos\theta + 2$, $x \in \mathbb{R}$ și $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are extreme locale $\forall\theta \in \mathbb{R}$.

Observații. 1. Orice funcție polinomială de grad n par are cel puțin un punct de minim sau de maxim. Într-adevăr, acest lucru decurge din continuitatea lui f și din faptul că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (cînd coeficientul celei mai mari puteri este pozitiv) sau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (cînd acest coeficient este negativ). Mai mult, se poate spune că funcția are un număr impar de puncte de extrem (de la 1 pînă la $n-1$) și punctele de maxim și minim alternează.

2. Dacă funcția polinomială este de grad n impar, atunci sau nu are extreme, sau are în număr par (de la 2 la $n-1$) și analog punctele de maxim și minim (dacă există) alternează.

De exemplu, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{17}{5}x^5 + 16x$ are două puncte de maxim local $x = -2$ și $x = 1$ și două puncte de minim local $x = -1$ și $x = 2$, care într-adevăr alternează, iar valorile extreme ale funcției sînt

$$f_{\max} = f(-2) \approx 19{,}912, \qquad f_{\min} = f(-1) \approx -12{,}711,$$

$$f_{\max} = f(1) \approx 12{,}711, \qquad f_{\min} = f(2) \approx -19{,}912.$$

2.20. Se consideră funcția $x \to f(x) = \dfrac{m - x}{x^2 - 3x + 2}$, unde m este un parametru. Care este numărul extremelor lui f cînd m ia valori reale?

Rezolvare. Deoarece $x^2 - 3x + 2$ are zerourile $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$, domeniul de definiție al lui f este $\mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$. Calculăm derivata $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m - 2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$ și observăm că $f'(x) = 0$ dacă și numai dacă $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$. Pe de altă parte, discriminantul redus al acestei ecuații este $\Delta_1 = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2)$. Ținînd seama de semnul lui Δ_1, ajungem la următoarele concluzii: pentru $m \in (1, 2)$ ecuația în x nu are soluții reale, adică $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$, și deci f nu are extreme; pentru $m \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ există două puncte $x_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 3m + 2}$ astfel încît $f'(x_{1,2}) = 0$ și la trecerea lui x prin $x_{1,2}$ derivata $f'(x)$ își schimbă semnul, deci $x_{1,2}$ sînt puncte de extrem; pentru $m = 1$ sau $m = 2$ funcția f nu are extreme.

Observații. 1. Fie funcția $x \to f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde P și Q sînt polinoame, iar $x \in \mathbb{R}\setminus\{x \mid x \in \mathbb{R},\ Q(x) = 0\}$. Se observă că

$$f'(x) = \frac{P'(x)\,Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)},$$

$$f''(x) = \frac{P''(x)\,Q(x) - P(x)Q''(x)}{Q^2(x)} - \frac{2Q'(x)}{Q(x)}f'(x).$$

Deci $P'(x)Q(x) - P(x)\,Q'(x) = 0$ dă punctele posibile de extrem, iar semnul lui $P''Q - PQ''$ în aceste puncte precizează natura lor.

2. Funcția $x \to f(x) = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ admite pe $x = -\dfrac{b}{2a}$ ca punct de maxim dacă și numai dacă $\Delta \neq 0$. În acest caz $f_{max} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4a}{\Delta}$.

2.21. Să se determine extremele funcției $x \to f(x) = \cos x^2$.

Rezolvare. Evident $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ este o funcție de clasa C^∞, adică admite derivate continue de orice ordin. Ecuația $f'(x) \equiv -2x \sin x^2 = 0$ are rădăcina dublă $x_0 = 0$ și soluțiile simple $x_k = \sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte $f''(x) = -2 \sin x^2 - 4x^2 \cos x^2$ și deci $f''(0) = 0$, $f''(x_k) = (-1)^{k+1} 4k\pi$.

Pentru $k = 2p$, $f''(x_k) = -4k\pi < 0$, adică $x_{2p} = \sqrt{2p\pi}$ sînt puncte de maxim și $f_{max} = f(\sqrt{2p\pi}) = 1$. Pentru $k = 2p + 1$ avem $f''(x_k) = 4k\pi > 0$, adică $x_{2p+1} = \sqrt{(2p+1)\pi}$ sînt puncte de minim și $f_{min} = f(\sqrt{(2p+1)\pi}) = -1$. Deoarece $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) < 0$, punctul $x_0 = 0$ este un punct de maxim și $f(0) = f_{max} = 1$.

2.5. Extreme globale ale funcțiilor derivabile

Considerăm funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Funcția f se numește *derivabilă pe* $[a, b]$ dacă este derivabilă pe (a, b), iar derivata la dreapta în a, și derivata la stînga în b există și sînt finite. O funcție derivabilă pe $[a, b]$ este și continuă pe $[a, b]$. De aceea ipoteza de derivabilitate pe un interval închis asigură implicit faptul că funcția este mărginită și își atinge marginile, adică posedă extreme globale. Pe de altă parte, punctele critice ale lui f, adică soluțiile ecuației $f'(x) = 0$, $x \in [a, b]$, sînt eventuale puncte de extrem (local sau global). Dacă derivata f' este continuă pe $[a, b]$ și nu se anulează pe (a, b), adică păstrează semn constant, atunci singurele puncte de extrem global ale lui f sînt extremitățile a și b: dacă $f'_d(a) \geqslant 0$ (respectiv $f'_s(b) \leqslant 0$), atunci $f(a)$ (respectiv $f(b)$) este minimul lui f; dacă $f'_d(a) \leqslant 0$ (respectiv $f'_s(b) \geqslant 0$), atunci $f(a)$ (respectiv $f(b)$) este maximul lui f.

Dacă f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b), atunci extremele globale sînt respectiv minimul și maximul mulțimii $\{f(a), f(b), f(x'_1), \ldots, f(x'_n)\}$, unde x'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt soluțiile ecuației $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$.

Mai general, fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Dacă f este derivabilă pe (a, b), excepție făcînd cel mult un număr finit de puncte din (a, b), atunci punctul în care se atinge un extrem global este fie un punct în care f nu este derivabilă, fie un punct critic, fie una din extremitățile intervalului. Acest lucru se decide comparînd valorile lui f în punctele menționate.

Exemple. 1. Funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$ are un punct de minim global în $x = 0$.

2. Pentru funcția $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^3 - x^2$ extremitățile intervalului sînt puncte de extrem, adică $x = -3$ este punct de minim global și $x = 3$ este punct de maxim

global, în timp ce punctele $x = 0$ și $x = 2/3$ din interiorul intervalului sînt puncte de extrem local și anume $x = 0$ este un punct de maxim local, iar $x = 2/3$ este punct de minim local.

3. Funcția $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2 - x^{2/3}$ este nederivabilă în punctul $x = 0$. Deci punctul $x = 0$ este punct critic și totuși acest punct este un punct de maxim global al lui f.

Observație. Un punct de extrem global poate fi și punct de discontinuitate. De exemplu funcția

$$x \to f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - e^{1/(x-1)}}, & x \in [0, 1), \\ 1/2, & x = 1 \end{cases}$$

are un punct de minim global în $x = 1$, care este punct de discontinuitate de speța întîi.

În final, dacă $f: E \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe E și derivabilă pe interiorul lui E, excepție făcînd cel mult un număr finit de puncte, atunci marginile lui f pe E se află printre următoarele valori: valorile lui f în punctele în care nu este derivabilă, valorile lui f în punctele critice, valorile sau limitele lui f pentru punctele frontieră ale lui E (inclusiv pentru $-\infty$ sau $+\infty$ dacă este cazul).

2.22. Să se găsească valoarea minimă a lui $a^2 + b^2$ cînd $a, b \in \mathbb{R}$ iar ecuația

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

are cel puțin o rădăcină reală.

(OIM, 1973)

Rezolvare. Pentru x fixat ecuația reprezintă o dreaptă D în planul aOb. Distanța de la origine la D este

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{x^4 + 1}{\sqrt{(x^3 + x)^2 + (x^2)^2}},$$

încît problema pusă se reduce la aflarea minimului global al funcției $x \to f(x) = \dfrac{(x^4 + 1)^2}{(x^3 + x)^2 + x^4}$.

Din $f'(x) = 0$, $x \neq 0$, se găsesc punctele critice $x_{1,2} = \pm 1$. Apoi se verifică relația $f(x) \geqslant f(x_{1,2}) = 4/5$. $\forall\, x \neq 0$. De aceea $\min\limits_{x \neq 0} f(x) = 4/5$, și deci $\min\ (a^2 + b^2) = 4/5$.

2.23. Fie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = (x - 1)\ln x - x$. Să se arate că f admite un punct de minim global în intervalul $(1, e)$.

Rezolvare. Din anularea derivatei de ordinul întîi $f'(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$ se obține ecuația transcendentă $\ln x = 1/x$, care rezolvată grafic conduce la o rădăcină reală x_1 situată în intervalul $(1, e)$. Deoarece $f''(x_1) > 0$, punctul x_1 este un punct de minim.

2.24. Un corp de greutate G trebuie tîrît pe o masă cu ajutorul unei forțe al cărui suport face cu direcția de mișcare un unghi $\theta \in [0, \pi/2]$. Știind că forța de frecare este proporțională cu forța normală de apăsare pe masă, să se determine θ astfel încît forța de tracțiune care învinge frecarea să fie cît mai mică posibil.

Rezolvare. Fie $F(\theta)$ forța de tracțiune (fig. 2.8). Componenta normală a lui $F(\theta)$ este $F(\theta)$ $\sin\theta$, iar $N(\theta) = G - F(\theta)\sin\theta$ este forța de apăsare pe masă. Componenta orizontală a lui

$F(\theta)$ este $F(\theta)\cos\theta$. Se impune condiția $F(\theta)\cos\theta = \mu[G - F(\theta)\sin\theta]$, unde μ este o constantă (coeficientul de frecare). Problema se reduce la găsirea minimului global al funcției

$$\theta \to F(\theta) = \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu\sin\theta}, \quad \theta \in [0, \pi/2],$$

sau echivalent la determinarea maximului global al funcției

$$\theta \to g(\theta) = \cos\theta + \mu\sin\theta, \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

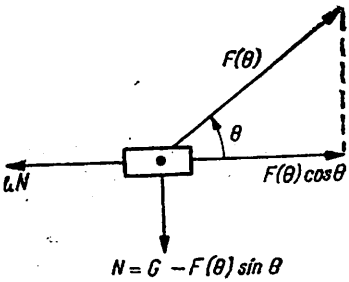


Fig. 2.8

La extremitățile intervalului $[0, \pi/2]$ avem $g(0) = 1$, $g(\pi/2) = \mu$. În interior $g'(\theta) = -\sin\theta + \mu\cos\theta$ și deci g are un punct critic $\theta = \alpha$, unde $\sin\alpha = \mu\cos\alpha$. Rezultă $g(\alpha) = \sqrt{1+\mu^2} > \max\{1, \mu\}$. Deci $g(\alpha) = \max\limits_{\theta} g(\theta)$. În concluzie

$$\min F(\theta) = F(\alpha) = \frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

2.25. Să se determine $\inf\limits_{x\in E} f(x)$ și $\sup\limits_{x\in E} f(x)$, unde $f: E \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$.

Rezolvare. Pentru existența lui $\ln x$ se impune $x > 0$ și se observă că dacă $x > 0$ și $\ln x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, atunci expresia $(\ln x)^{\ln x}$ are sens; de asemenea, pentru $x > 0$ și $\ln x > 0$, adică pentru $x > 1$, expresia $(\ln x)^{\ln x}$ are sens [23]. Deci domeniul maxim de definiție al lui f este

$$E = \{x \mid x \in (0,1),\ \ln x \in \mathbb{Z}\} \cup (1, \infty) = \{x \mid x = e^{-n},\ n = 1, 2, \ldots\} \cup (1, \infty).$$

Pentru $x \in (1, \infty)$ avem $f'(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}(\ln\ln x + 1)$, iar $f'(x) = 0$ implică $x_0 = e^{1/e}$. Se constată că x_0 este un punct de minim local și $f(x_0) = e^{-1/e}$. Apoi $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Pe de altă parte $f(e^{-n}) = (-n)^{-n}$ și deci $f(e^{-1}) = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(e^{-n}) = 0$. Se observă că $f(e^{-n}) \in [-1, 1/4]$.

În concluzie $\inf\limits_{x\in E} f(x) = \min\limits_{x\in E} f(x) = -1$ și $\sup\limits_{x\in E} f(x) = \infty$.

2.26. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Găsirea aproximativă a extremelor globale ale lui f se reduce la evaluarea unor valori $f(x)$, $x \in [a, b]$. Dacă adăugăm la acestea și semnul derivatei f', avem și posibilitatea de a preciza existența și natura extremelor locale. Uneori însă, forțați de împrejurări, recurgem nu la semnul derivatei f', ci la semnele unor valori aproximative, de exemplu

$$f'(x) \approx \frac{1}{12h}[f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)].$$

Precizăm însă că derivarea numerică este plină de dificultăți și riscuri, putînd duce la erori foarte mari, în comparație cu derivarea analitică care este simplă și exactă. De aceea derivarea aproximativă se utilizează și dă rezultate bune numai în cazuri cu totul și cu totul particulare.

Folosim programul din § 2.3 în care introducem instrucţiuni pentru calculul valorilor derivatei şi anume

```
      N2 = N - 2
      DO 120 K = 3, N2
      KM2 = K - 2
      KM1 = K-1
      KP1 = K + 1
      KP2 = K+2
      K2 = K-2
120   D (K2) = (F(KM2)-8*F (KM1)+8*F (KP1)-F(KP2))/(12*H)
      N4 = N-4
      WRITE (NW, 30)
30    FORMAT (10X, 'PUNCTUL', 10X, 'VALOAREA FUNCŢIEI', 10X, 'VALOAREA
     *DERIVATEI')
      DO 130 K = 1,N4
      K2 = K+2
      WRITE (NW, 40) X(K2), F(K2), D(K)
40    FORMAT 10X, F7.3, 12X, E14.7, 12X, E14.7)
```

Rulînd programul pentru $f_1 : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - x$, se observă că există un punct $x_1 \in \left(\frac{17}{10}, \frac{18}{10}\right)$ în care funcţia îşi atinge minimul global $f_{1\,\min} = f_1(x_1) \approx -1{,}657785$, deoarece derivata în stînga lui x_1 este negativă, iar în dreapta punctului este pozitivă (se confirmă concluzia din aplicarea metodei reţelei).

Situaţia este cu totul alta în cazul funcţiei $f_2 : [0, 5] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{[\cos(x^2 - 1) + x^2]^{1/2}}{(3x^2 + 17)^{1/3}}$, pentru care prin metoda reţelei se obţin doar extremele globale. Valorile şi semnul derivatei obţinute din programul rulat indică următoarele puncte de extrem: puncte de maxim local $x_2 \in (1, 15/10)$, $x_4 \in (25/10, 3)$, $x_6 \in (35/10, 4)$, puncte de minim local $x_3 \in (15/10, 2)$, $x_5 \in (3, 35/10)$, $x_7 \in (4, 45/10)$, iar $x_1 = 0$ este punct de minim global cu $f_{2\min} \approx 0{,}285878$ şi $x_8 = 5$ punct de maxim global cu $f_{2\max} \approx 1{,}116934$.

2.6. Funcţii Morse

Fie J un interval deschis din $\mathbb{R}$ şi $f: J \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2, adică o funcţie continuă care posedă pe J derivate de ordinul unu şi doi continue. Presupunem că $x_0 \in J$ este un punct critic al lui f (posibil punct de extrem local sau punct de inflexiune). Dacă $f''(x_0) \neq 0$, atunci x_0 se numeşte *punct critic nedegenerat* (punct de extrem local); în caz contrar x_0 se numeşte *punct critic degenerat*. Numărul $f(x_0)$ se numeşte *valoare critică* a lui f.

1) Fie I un interval deschis din $\mathbb{R}$. Funcţia $\varphi : I \to J$ se *numeşte difeomorfism global de clasă* C^2 dacă φ este bijectivă şi atît φ şi cît φ^{-1} sînt de clasă C^2.

O funcţie $\varphi : I \to J$ de clasa C^2 se numeşte *difeomorfism local* dacă pentru orice punct $x \in I$ există o vecinătate $I_1 \subset I$ a lui x astfel încît $\varphi|_{I_1}$ să fie un difeomorfism global; φ are această proprietate dacă şi numai dacă $\varphi' \neq 0$ pe I (dacă la $\varphi' \neq 0$ adăugăm ipoteza că φ este o bijecţie, atunci φ este un difeomorfism global).

Vom demonstra că difeomorfismele de clasă C^2 păstrează natura punctelor critice.

Teoremă. *Fie $f : J \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2, iar $\varphi : I \to J$ un difeomorfism de clasa C^2. Punctul $x_0 \in J$ este un punct critic nedegenerat (degenerat) dacă şi numai dacă punctul $\varphi^{-1}(x_0)$ este un punct critic nedegenerat (degenerat) pentru funcţia $g = f \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Regulile de derivare a funcţiilor compuse ne conduc la $g' = (f' \circ \varphi)\varphi'$ şi $g'' = (f'' \circ \varphi)\varphi'^2 + (f' \circ \varphi)\varphi''$. Pe de altă patre $\varphi' \neq 0$. De aceea $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(\varphi^{-1}(x_0)) = 0$ şi luînd una dintre aceste egalităţi drept ipoteză, avem $g''(\varphi^{-1}(x_0)) = f''(x_0) \cdot \varphi'^2(\varphi^{-1}(x_0))$.

Observaţie. Deoarece I este un interval şi $\varphi' \neq 0$, proprietatea lui Darboux a derivatei arată că φ' păstrează semn constant pe I (adică φ este strict monotonă pe I).

Presupunem că punctele critice ale lui f sînt nedegenerate. Dacă $\varphi' > 0$, atunci graficul lui g este orientat la fel cu graficul lui f, ambele grafice avînd aceeaşi alură. Dacă $\varphi' < 0$, atunci graficul lui g are o orientare opusă graficului lui f.

2) Punctele critice nedegenerate sînt izolate, reciproca nefiind adevărată. La bază este o teoremă a lui Morse prin care se stabileşte că restricţia lui f la o vecinătate a lui x_0 poate fi adusă la o formă canonică printr-o schimbare de coordonate.

Lemă. *Dacă $0 \in J$, iar $f : J \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2 pentru care $f(0) = 0$, atunci există o funcţie $g : J \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încît $f(x) = xg(x)$, $\forall x \in J$, şi $g(0) = f'(0)$.*

Demonstraţie. Evident

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx)\mathrm{d}t = x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} f(u)\Big|_{u=tx} \mathrm{d}t.$$

Expresia $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} f(u)\Big|_{u=tx} \mathrm{d}t$ defineşte funcţia $g : J \to \mathbb{R}$ pentru care $g(0) = f'(0)$. Cu acestea lema este demonstrată.

Teorema lui Morse. *Fie $f : J \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 şi x_0 un punct critic nedegenerat. Atunci există o funcţie $\bar{x} : J \to \mathbb{R}$, cu $\bar{x}(x_0) = 0$, difeomor-*

fism pe o vecinătate a lui x_0, astfel încît $f \circ \tilde{x}^{-1} = f(x_0) \pm \tilde{x}^2$, semnul + sau — fiind semnul lui $f''(x_0)$.

Demonstrație. Fără a scădea generalitatea, putem presupune că $x_0 = 0$ și $f(0) = 0$, fiind vorba de simple translații. În baza lemei precedente $f(x) = xg(x)$, $\forall x \in J$. Deoarece 0 este punct critic, avem $g(0) = f'(0)$ și de aceea tot lema precedentă aplicată lui g conduce la $g(x) = xh(x)$, $\forall x \in J$ și deci $f(x) = x^2h(x)$, $\forall x \in J$. În plus $2h(0) = f''(0) \neq 0$.

Dacă $h(0) > 0$, atunci datorită continuității lui h există o vecinătate V a lui 0 astfel încît $h(x) > 0$, $\forall x \in V$. Punem $\tilde{x}(x) = x\sqrt{h(x)}$, $x \in V$ și prin calcul deducem $\tilde{x}'(0) = \sqrt{h(0)} \neq 0$. Astfel $x \to \tilde{x}(x)$ este un difeomorfism local și $f \circ \tilde{x}^{-1} = \tilde{x}^2$. Cazul $h(0) < 0$ se explicitează analog.

Două funcții $u, v : J \to \mathbb{R}$ (de clasă C^2) se numesc *echivalente* într-o vecinătate V a lui $0 \in J$ dacă există un difeomorfism local $x \to y(x)$ astfel încît $u(x) = v(y)(x)) + r$, $\forall x \in V$. Teorema precedentă arată că într-o vecinătate a unui punct critic nedegenerat funcția f este echivalentă cu una din formele canonice $x \to x^2$ (cazul punctului de minim) sau $x \to -x^2$ (cazul punctului de maxim). Pe de altă parte, se observă că $x \to \pm x^2$ au puncte critice nedegenerate izolate, iar schimbările de coordonate (difeomorfismele) duc punctele critice izolate în puncte critice izolate. De aceea punctele critice nedegenerate ale unei funcții f sînt izolate.

3) Fie $f, p : J \to \mathbb{R}$ două funcții de clasă C^2, iar $x_0 \in J$ un punct critic al lui f. Spunem că f este *structural stabilă* într-o vecinătate a punctului critic x_0 dacă pentru orice funcție p suficient de mică [25] funcțiile f și $f + p$ sînt echivalente, după o translație potrivită a originii; altfel spus, punctele critice ale funcțiilor f și $f + p$ sînt de același tip. Raționamentele precedente arată că orice funcție este structural stabilă într-o vecinătate a unui punct critic nedegenerat.

4) Fie $f : J \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2. Dacă f'' nu se anulează în punctele critice ale lui f, atunci f se numește *funcție Morse*. Graficul derivatei unei astfel de funcții este *transversal* față de axa Ox.

Funcțiile Morse au o structură relativ stabilă în sensul proprietăților date mai jos, proprietăți care intervin esențial în teoria catastrofelor elementare (cap. 4).

a) Din punct de vedere local, funcțiile Morse sînt cele mai simple posibile în sensul că există sisteme de coordonate în care ele se reduc la funcții liniare (în vecinătatea punctelor x pentru care $f'(x) \neq 0$) sau la funcții pătratice (în vecinătatea punctelor x pentru care $f'(x) = 0$, $f''(x) \neq 0$).

b) Dacă $f : J \to \mathbb{R}$ este o funcție Morse, iar $\varphi : I \to J$ este un difeomorfism, atunci $g = f \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ este o funcție Morse.

c) O funcție Morse este structural stabilă în sensul că o perturbare suficient de mică a lui f poate fi întotdeauna exprimată (local) în aceeași formă ca și f printr-o schimbare a coordonatei x și printr-o schimbare a scării valorilor $y = f(x)$.

De exemplu funcția $x \to x^2$ este o funcție Morse. Dacă la aceasta adunăm funcția $x \to x$, obținem $x \to x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ care poate fi exprimată prin $u \to u^2$ dacă punem $u = x + 1/2$ și dacă mutăm originea lui $\mathbb{R}$ în punctul $-1/4$.

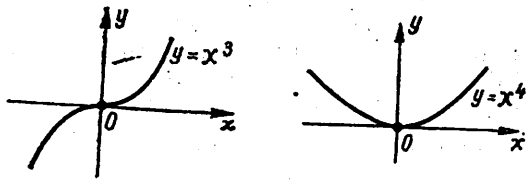


Fig. 2.9

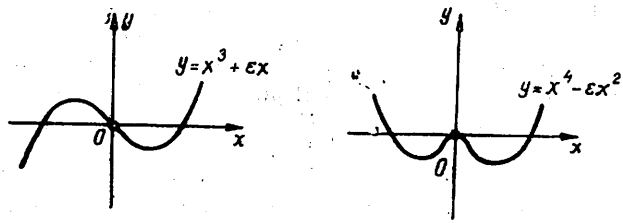


Fig. 2.10

Drept contraexemple considerăm funcțiile $x \to x^3$ și $x \to x^4$ (fig. 2.9) care nu sînt funcții structural stabile (și deci nici funcții Morse). Într-adevăr, se constată că perturbările arbitrar de mici $x \to x^3 + \varepsilon x$, respectiv $x \to x^4 - \varepsilon x^2$ (unde $\varepsilon > 0$ este oricît de mic) au mai multe puncte critice (aici puncte de extrem) decît funcțiile inițiale. Cu alte cuvinte, graficele perturbărilor (fig. 2.10) nu mai au respectiv aceeași alură cu graficele din fig. 2.9. Aceste contraexemple pun în evidență și faptul că orice funcție care nu are proprietatea lui Morse poate fi schimbată într-o funcție Morse prin modificări oricît de mici.

2.27. Fie I un interval deschis din $\mathbb{R}$ și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2. Să se arate că dacă $x_0 \in I$ este un punct de inflexiune pentru f, atunci x_0 este un punct de extrem local pentru f'.

Rezolvare. Fie x_0 un punct de inflexiune al lui f; $f''(x_0) = 0$ și f''' are semnul $-(+)$ la stînga lui x_0 și respectiv semnul $+(-)$ la dreapta lui x_0. De aceea f' descrește (crește) pe subintervalul $x \in I$, $x > x_0$ și respectiv crește (descrește) pe subintervalul $x \in I$, $x > x_0$. Mai mult, f' este (prin ipoteză) continuă în x_0. De aceea $x = x_0$ este un punct de extrem local pentru f'.

2.28. Să se arate că $x \to f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ este o funcție Morse.

Rezolvare. Se observă că domeniul de definiție al lui f este $(0, \infty)$. Să punem $\varphi(u) = u + \frac{1}{u}$, $u > 0$ și $u = \sqrt{x}$. Funcția $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este o funcție Morse deoarece $\varphi''(u) = \frac{2}{u^3}$ nu se anulează, iar $u : (0, \infty) \to (0, \infty)$ este un difeomorfism global. De aceea $f = \varphi \circ u$ este o funcție Morse.

2.29. Se dă funcţia $x \to f(x) = \ln(1 + x^2)$. 1) Să se arate că f este o funcţie Morse.

2) Să se găsească extremele globale ale lui f'.

Rezolvare. 1) Deoarece $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ şi $f''(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$ nu se anulează simultan, funcţia f are proprietatea lui Morse.

2) Se observă că $|f'(x)| = \dfrac{2|x|}{1 + x^2} \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De aceea $\min\limits_x f'(x) = -1$, $\max\limits_x f'(x) = 1$.

2.30. Se consideră funcţiile $x \to f(x) = x^2$, $x \to g(x) = x^2 - x^4$ şi

$$x \to h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}\sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2}}, & x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1) Să se arate că $h : \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \to \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este un difeomorfism şi $f(x) = g(h(x))$, $\forall x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

2) Există un difeomorfism global $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încît $f = g \circ u$?

Rezolvare. 1) Deoarece $h(x_1) = h(x_2)$ implică $x_1 = x_2$, funcţia h este bijectivă. Pe de altă parte, h este derivabilă. De aceea h^{-1} există şi este derivabilă, adică h este difeomorfism. Calcule directe arată că h reduce pe g la f în intervalul $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

2) Funcţia g are trei extreme locale, iar funcţia f are un singur extrem local. De aceea nu există nici o schimbare globală de coordonate care să ducă graficul lui g în graficul lui f (fig. 2.11.)

2.7. Funcţii convexe

Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie reală. Dacă

$$f((1 - t)a + tb) \leqslant (1 - t)f(a) + tf(b), \quad \forall a, b \in I, \quad \forall t \in [0, 1],$$

atunci funcţia f se numeşte *convexă*. Dacă $f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$, $a \neq b$, $t \in (0, 1)$, atunci funcţia f se numeşte *strict convexă*.

Funcţia f se numeşte *concavă* (*strict concavă*) dacă funcţia $-f$ este convexă (strict convexă). De aceea toată teoria funcţiilor convexe are un corespondent pentru funcţiile concave.

Din punct de vedere geometric, relaţia precedentă arată că $\forall a, b$ graficul restricţiei lui f

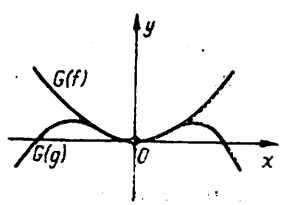


Fig. 2.11

4 — c. 661

la $[a, b]$ se află sub segmentul de dreaptă ce unește punctele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ (fig 2.12).

Teoremă. *Dacă f este o funcție convexă pe I și c este un număr real, atunci $\{x \mid x \in I, f(x) \leqslant c\}$ este un interval (mulțimea vidă și mulțimea formată cu un singur element sînt privite ca intervale particulare).*

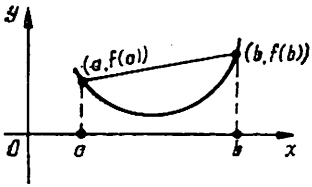


Fig. 2.12

Demonstrație. Lăsăm de o parte cazurile particulare. Fie a și b două puncte distincte din I care satisfac $f(a) \leqslant c$, $f(b) \leqslant c$, și $x = (1-t)a + tb$ un punct arbitrar de pe segmentul care unește pe a cu b. Deoarece f este convexă, găsim

$$f(x) = f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b) \leqslant$$
$$\leqslant (1-t)c + tc = c.$$

Astfel orice punct x dintre a și b satisface $f(x) \leqslant c$, cînd a și b satisfac această inegalitate.

Teoremă. *Orice funcție convexă $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă.*

Demonstrație. Fie x_0 din interiorul lui I. Alegem pe c astfel încît intervalul $\{x \mid x \in I, f(x) \leqslant c\}$ să conțină intervalul $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ Fie $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\frac{|x - x_0|}{\delta} = t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ și $a, b = x_0 \pm \frac{1}{t}(x - x_0)$ care aparțin lui $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Avem

$$f(x) = f((1-t)x_0 + ta) \leqslant (1-t)f(x_0) + tf(a) \leqslant (1-t)f(x_0) + tc,$$

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}b\right) \leqslant \frac{1}{1+t}(f(x) + tc).$$

Acestea implică

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{c - f(x_0)}{\delta}|x - x_0|$$

și deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tratarea cazului cînd x_0 este o extremitate a lui I, $x_0 \in I$, este evidentă.

Teoremă. *Fie I un interval deschis și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Funcția f este convexă pe I dacă și numai dacă*

$$f(a) + (b - a)f'(a) \leqslant f(b), \ \forall a, b \in I.$$

Cu alte cuvinte, f este convexă dacă și numai dacă dreapta tangentă la graficul lui f se află mereu sub grafic.

Demonstrație. Din

$$f((1-t)a+tb) \leqslant (1-t)f(a)+tf(b),\ 0<t\leqslant 1,$$

rezultă

$$f(a)+\frac{f(a+t(b-a))-f(a)}{t}\leqslant f(b).$$

Trecînd la limită, găsim

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{f(a+t(b-a))-f(a)}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(a+t(b-a))\Big|_{t=0}=$$

$$=(b-a)f'(a)\leqslant f(b)-f(a).$$

Reciproc, să presupunem că

$$f(a)+(b-a)f'(a)\leqslant f(b),\ \forall a,\ b\in I. \tag{2.1}$$

Schimbînd pe a cu b, deducem

$$f(b)+(a-b)f'(b)\leqslant f(a),\ \forall a,\ b\in I. \tag{2.2}$$

Fie $c=a+t(b-a)$, $t\in[0,1]$. În (2.1) înlocuim pe a cu c și înmulțim inegalitatea obținută cu t; în (2.2) înlocuim pe b cu c și înmulțim inegalitatea obținută cu $1-t$; adunînd, găsim

$$f((1-t)a+tb)\leqslant(1-t)f(a)+tf(b),\ \forall a,\ b\in I,\ \forall t\in[0,1].$$

Teoremă. *Fie I un interval deschis și $f: I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă de două ori. Funcția f este convexă dacă și numai dacă $f''(x)\geqslant 0$, $\forall x\in I$.*

Demonstrație. Presupunem că f este convexă, adică $f(a)+(b-a)f'(a)\leqslant f(b)$, $\forall a,\ b\in I$. Conform teoremei lui Lagrange avem $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, $\exists c\in(a,b)$. Rezultă că $f'(a)\leqslant f'(c)$ și deci $f'(x)$ este crescătoare. De aceea $f''(x)\geqslant 0$, $\forall x\in I$.

Reciproc, să presupunem $f''(x)\geqslant 0$, $\forall x\in I$. Considerăm funcția

$$x\to g(x)=f(a)+(x-a)f'(a)-f(x).$$

Din teorema lui Lagrange

$$g'(x)=f'(a)-f'(x)=f''(c)(a-x),\ a<c<x,$$

rezultă $g'(x)\leqslant 0$, $\forall x>a$, adică $g(x)$ este descrescătoare la dreapta lui a și $g'(x)\geqslant 0$, $\forall x<a$, adică $g(x)$ este crescătoare la stînga lui a. În plus, $g(a)=0$. Rezultă

$$f(a)+(x-a)f'(a)\leqslant f(x).$$

Observație. Dacă $f''(x)>0$, $\forall x\in I$, atunci f este strict convexă. Reciproca nu este adevărată.

Se poate verifica ușor că pentru o funcție convexă mulțimea punctelor de minim local coincide cu mulțimea punctelor de minim global. De asemenea $\min\limits_{x \in I} f(x)$ este unic (vezi 3.2).

Teorema. *Mulțimea punctelor de minim pentru o funcție convexă este un interval (mulțimea vidă, mulțimea cu un singur element sau interval propriu-zis* (fig. 2 13).

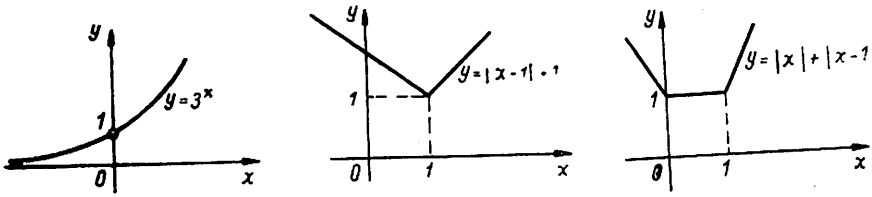


Fig. 2.13

Demonstrație. Dacă f are un minim m pe I, atunci mulțimea punctelor de minim este intersecția a două intervale și anume

$$I \cap \{x \mid x \in I,\ f(x) \leqslant m\}.$$

Prin urmare, dacă mulțimea punctelor de minim ale unei funcții convexe are cel puțin două puncte, atunci are o infinitate.

Teoremă. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție convexă și diferențiabilă. Dacă $f'(a) = 0$, atunci $a \in I$ este un punct de minim.*

Demonstrație. Din $f(a) + (b-a)f'(a) \leqslant f(b)$, $\forall a,\ b \in I$, rezultă $f(a) \leqslant f(b)$, $\forall b \in I$.

Teoremă. *Dacă o funcție convexă $f : I \to \mathbb{R}$ are un punct de maxim global în interiorul lui I, atunci f este o constantă.*

Demonstrație. Fie b din interiorul lui I. Dacă b este un punct de maxim global, atunci $f(x) \leqslant f(b)$, $\forall x \in I$. Fie y așa ca $f(y) \leqslant f(b)$. Avem $f(b) = f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$. Dacă $f(y) < f(b)$, rezultă $f(b) < (1-t)f(b) + tf(b) = f(b)$, ceea ce este absurd. Rămîne $f(y) = b$, $\forall y \in I$.

De aceea, dacă funcția convexă f nu este o constantă, punctele de maxim global sînt eventual extremitățile lui I. Evident într-un astfel de punct derivata întîi a lui f nu se anulează. Precizăm că funcțiile strict convexe sînt unimodale.

2.31. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 - \ln x^2$. Să se arate că este o funcție strict convexă și să se calculeze minimul funcției.

Rezolvare. Datorită parității funcției, vom considera numai domeniul $(0, \infty)$, pe care derivata de ordinul întîi $f'(x) = 2\dfrac{x^2-1}{x}$ se anulează în $x_1 = 1$. Deoarece $f''(x) = 2\dfrac{x^2+1}{x^2}$ este strict pozitivă, $\forall x \in \mathbb{R}$, funcția este strict convexă; rezultă că orice punct critic este

punct de minim, deci funcția f are două puncte de minim $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$ și valoarea minimă a funcției este $f_{\min} = f(1) = f(-1) = 1$.

2.32. Fie $\mathcal{Q}$ mulțimea polinoamelor reale P cu coeficienți nenegativi.

1) Să se arate că $x \to f(x) = \dfrac{P(x)}{x^n}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, este convexă.

2) Fie x_0, $\alpha \in (0, 1)$; utilizînd rezultatul precedent să se găsească

$$m(x_0;\ \alpha) = \inf_P \{P'(1) \mid P \in \mathcal{Q},\ P(1) = 1,\ P(x_0) \leqslant \alpha\}.$$

Rezolvare. 1) Fie $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $a_k \geqslant 0$. Rezultă $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^{k-n}$ și $f''(x) = \sum_{k=0}^{m} (k-n)(k-n-1)a_k x^{k-n-2}$. Pe de altă parte, $(k-n)(k-n-1)a_k \geqslant 0$, $\forall\, k, n$, și deci $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x > 0$.

2) Alegem pe n astfel incît $x_0^n \geqslant \alpha \geqslant x_0^{n+1}$. Deoarece f este convexă, avem

$$f'(1) \geqslant \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} \geqslant \frac{1 - \dfrac{\alpha}{x_0^n}}{1 - x_0} = \frac{x_0^n - \alpha}{x_0^n - x_0^{n+1}}.$$

Astfel $P'(1) = nf(1) + f'(1) \geqslant n + \dfrac{x_0^n - \alpha}{x_0^n - x_0^{n+1}}$ și deci $m(x_0;\ \alpha) = n + \dfrac{x_0^n - \alpha}{x_0^n - x_0^{n+1}}$. Această margine inferioară este un minim, deoarece este atinsă pentru polinomul

$$P(x) = \frac{x_0^n - \alpha}{x_0^n - x_0^{n+1}} x^{n+1} + \frac{\alpha - x_0^{n+1}}{x_0^n - x_0^{n+1}} x^n.$$

2.8. Probleme propuse

2.1. Să se dovedească relațiile lăsate pe seama cititorului din problemele rezolvate 2.1—2.7.

2.2. Să se determine marginile mulțimii

$$A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos\frac{n\pi}{2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

R. $m = -\dfrac{e}{2}$, $M = \dfrac{3e}{2} + 1$.

2.3. 1) Fie a un număr real. Să se arate că există un singur polinom P_n de gradul n, cu coeficienți reali, astfel încît

$$\max_i |P_n(i) - a^i| = 0, \text{ unde } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

2) Fie $a \geqslant 3$ și Q_n un polinom oarecare de gradul n cu coeficienți reali. Să se arate că

$$\max_i |Q_n(i) - a^i| \geqslant 1, \text{ unde } i = 0, 1, 2, \ldots, n+1.$$

2.4. Fie n_1 cel mai mic întreg pozitiv pentru care inegalitatea $(1 + x)^n > 1 + nx + nx^2$ este adevărată pentru orice $x > 0$. Să se determine n_1 şi să se demonstreze că inegalitatea este adevărată pentru orice întreg $n \geqslant n_1$.

R. $n_1 = 3$.

2.5. Folosind programul din problema 2.15 să se calculeze valorile funcţiei $f: [-5,5] \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \frac{5}{3}x^{16} + \frac{3}{2}x^{13} - 2x^8 + 7x^5 - 0{,}1x^2 + 0{,}01$, sugerînd valoarea maximă şi minimă globală, aproximativă.

2.6. Se consideră funcţiile reale definite respectiv prin:

1) $f(x) = (x + 2)^{2/3} - (x - 2)^{2/3}$, $x \in [-3, 3]$,

2) $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{pentru } x \in (0, 1], \\ 1 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$

Utilizînd metoda reţelei sau metoda Fibonacci, să se evalueze extremele acestor funcţii.

R. 1) $x_{\min} = -2$ şi $\min\limits_x f(x) \approx -2{,}52$; $x_{\max} = 2$ şi $\max\limits_x f(x) \approx 2{,}52$.

2) $x_{\min} = \frac{1}{e}$ şi $\min\limits_x f(x) \approx 0{,}69$; $x_{\max} \in \{0,1\}$ şi $\max\limits_x f(x) = 1$.

2.7. Folosind monotonia funcţiei $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, să se arate că:

1) $\alpha^{\sqrt{\beta}} < \beta^{\sqrt{\alpha}}$, dacă $0 < \alpha < \beta < e^2$;

2) $\alpha^{\sqrt{\beta}} < \beta^{\sqrt{\alpha}}$, dacă $\alpha > \beta > e^2$.

2.8. Să se determine punctele de extrem ale următoarelor funcţii elementare: 1) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$, 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \cos x + \frac{3x^2}{2\pi}$, 3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = (x + 1)^5(x - 1)^6$, 4) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}\right\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 5x^2 + 5} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 - 5x^2 + 5}}$, 5) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{|x + 1|}{\ln|x + 1|}$, 6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3$.

R. 1) Un punct de maxim $x_1 \in (1, e)$. 2) Trei puncte de maxim $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{\pi}{6}$. 3) Un punct de minim $x = 1$. 4) Unsprezece puncte de extrem şi anume şase puncte de minim $x_1 = -2$, $x_2 = -\sqrt{10}/2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = \sqrt{10}/2$, $x_6 = 2$ şi cinci puncte de maxim $x_7 = -\sqrt{3}$, $x_8 = -\sqrt{2}$, $x_9 = 0$, $x_{10} = \sqrt{2}$ şi $x_{11} = \sqrt{3}$. 5) Două puncte de minim $x_1 = -1 - e$ şi $x_2 = e - 1$. 6) Un punct de minim $x = 1$.

2.9. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^x(\operatorname{tg} x - 1)$ are o infinitate de puncte de minim şi nici un punct de maxim.

R. $x = k\pi$ şi $f(k\pi) = -e^{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$; $x = l\pi - \frac{\pi}{4}$ şi $f\left(l\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -2e^{l\pi - \frac{\pi}{4}}$, $l \in \mathbb{Z}$.

2.10. Să se arate că ecuaţia $y^2 = x(x^2 - 1)$ defineşte două funcţii, dintre care una are un minim, iar alta are un maxim.

2.11. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are derivată de ordinul trei continuă şi satisface relaţia

$$\lim_{x \to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{1/x} = e^3.$$

Să se arate că $f(0)$ este un minim local al lui f.

2.12. Presupunem că x este un număr din intervalul $[a, b]$ pe care dorim să-l aproximăm prin numărul $t \in [a, b]$ astfel încît eroarea relativă $\frac{|t - x|}{x}$ să fie cît mai mică posibil. Fie $M(t) = \max\limits_{x \in [a,b]} \frac{|t - x|}{x}$.

1) Să se arate că acest maxim este atins într-unul din punctele $x = a$ sau $x = b$.

2) Să se arate că punctul de minim t_0 al funcţiei $t \to M(t)$ este media armonică a numerelor a şi b, adică $\frac{2}{t_0} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

2.13. Fie f o funcţie reală care verifică ecuaţia diferenţială

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1) Să se arate că dacă x_0 este un punct de extrem local al lui f, atunci x_0 este un punct de minim (cazul $x_0 = 0$ se va discuta separat).

2) Presupunînd că $f(0) = f'(0)$, să se determine cea mai mică constantă a astfel încît $f(x) \leqslant ax^2$, $\forall x \geqslant 0$.

R. 2) $a = 1/2$.

2.14. Se consideră funcţia $x \to f(x) = 5x^2 + tx^{-5}$, unde t este un parametru pozitiv. Să se determine cea mai mică valoare a lui t pentru care $f(x) \geqslant 24$, $\forall x \in (0, \infty)$.

R. $t = 2\left(\frac{24}{7}\right)^{7/2}$.

2.15. Fie $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ o funcţie care are derivate continue de ordinul unu şi doi pe $[0, a]$. Să se arate că dacă f îşi atinge maximul pe $(0, a)$ şi dacă $|f''(x)| \leqslant m$, $\forall x \in [0, a]$, atunci $|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant am$.

2.16. Să se arate că $\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\, dt \geqslant 0$, $\forall x \geqslant 0$.

2.17. Se consideră funcţia reală definită prin $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$, $x > 0$. Să se determine valorile lui x pentru care $\ln x \leqslant f(x)$.

R. $x \geqslant 1$.

2.18. Să se verifice că funcţia $x \to f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$, $a + b + 1 \neq 0$, este o funcţie Morse care admite un minim şi un maxim (locale). Este acest lucru adevărat şi pentru perturbarea $x \to g(x) = cx + d + f(x)$? Generalizare.

R. Generalizare: suma dintre o funcţie Morse şi o funcţie liniar afină $x \to cx + d$ este o funcţie Morse.

2.19. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $x \to f(x) = x^n \sin x$ să fie o funcţie Morse, precizîndu-se şi natura punctelor critice.

2.20. Să se arate că 1) $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x$ pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall x > 0$, 2) $e^x < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ pentru $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < x < n$. Pentru ce valoare a lui n găsim $2{,}5 < e < 2{,}99$?

2.21. Să se verifice inegalităţile 1) $\forall x > 0$, $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$, 2) $\forall x > -1$, $\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$, 3) $\forall a$ şi b astfel ca $0 < b \leqslant a$, $\frac{a-b}{a} \leqslant \ln \frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b}$.

2.22. Fie $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = -\ln \ln x$.

1) Să se arate că f este o funcţie convexă.

2) Să se deducă inegalitatea $\ln \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}$, oricare ar fi numerele supraunitare a şi b.

2.23. Să se verifice că funcţia $x \to f(x) = 2x - 3 + 1/x$, $x > 0$, este convexă. Este acest lucru adevărat şi pentru $x \to g(x) = ax + b + c/x$, $x > 0$? Generalizare.

R. Generalizare: suma dintre o funcţie convexă şi o funcţie liniar afină este o funcţie convexă.

3

EXTREMELE FUNCȚIILOR REALE DE MAI MULTE VARIABILE REALE

Fie $\mathbb{R}^n$ spațiul euclidian cu n dimensiuni și $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ două puncte din $\mathbb{R}^n$. Mulțimea punctelor de forma $(1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$, cu $t \in [0, 1]$ se numește *segmentul de dreaptă* care unește punctul $\mathbf{x}$ cu punctul $\mathbf{y}$ și se notează prin $\mathbf{xy}$.

3.1. Convexitate

O mulțime $S \subset \mathbb{R}^n$ se numește *convexă* dacă pentru oricare două puncte ale sale $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ segmentul $\mathbf{xy}$ este inclus în S.

Teoremă. *Intersecția a două mulțimi convexe din $\mathbb{R}^n$ este o mulțime convexă.*

Demonstrație. Fie $S, T \subset \mathbb{R}^n$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \cap T$, rezultă că $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T$ și deoarece S și T sînt convexe, $\mathbf{xy} \subset S$ și $\mathbf{xy} \subset T$ și deci $\mathbf{xy} \subset S \cap T$.

Proprietatea precedentă se poate generaliza pentru un număr finit sau infinit de mulțimi.

Observație. Celelalte operații booleene (*reuniunea și trecerea la complementară*) nu păstrează convexitatea.

Fie S o mulțime convexă din $\mathbb{R}^n$ și $f : S \to \mathbb{R}$ o funcție cu valori reale. Dacă $f((1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leqslant (1 - t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, $\forall t \in [0, 1]$, atunci funcția f se numește *convexă*. Dacă

$$f((1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) < (1 - t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}), \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \ \forall t \in (0, 1).$$

atunci funcție f se numește *strict convexă*.

Funcția f se numește *concavă* (*strict concavă*) dacă $-f$ este convexă (strict convexă). Evident, funcția f este și convexă și concavă dacă și numai dacă ea este liniar afină, adică $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$.

Din punct de vedere geometric definiţia funcţiei convexe (concave) se reduce la a spune că segmentul care uneşte două puncte ale graficului lui f se află deasupra (dedesubtul) graficului.

Teoremă. *Dacă f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, sînt funcţii convexe pe $S \subset \mathbb{R}^n$ şi $c_i \geqslant 0$, atunci şi funcţia $\sum_{i=1}^{k} c_i f_i$ este convexă pe S.*

Demonstraţie. Prin ipoteză avem

$$f_i((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leqslant (1-t) f_i(\mathbf{x}) + t f_i(\mathbf{y}),$$

care implică

$$(\sum_i c_i f_i)((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leqslant (1-t)(\sum_i c_i f_i)(\mathbf{x}) + t(\sum_i c_i f_i)(\mathbf{y}).$$

Exemplu. Funcţiile $\mathbf{x} \to f_i(\mathbf{x}) = \alpha_i x_i^2$, $\alpha_i > 0$, sînt convexe deoarece

$$f_i((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = f_i((1-t)x_1 + ty_1, \ldots, (1-t)x_i + ty_i, \ldots, (1-t)x_n + ty_n) =$$
$$= \alpha_i((1-t)x_i + ty_i)^2 < \alpha_i[(1-t)x_i^2 + ty_i^2] = (1-t) f_i(\mathbf{x}) + t f_i(\mathbf{y}).$$

Conform teoremei precedente rezultă că şi funcţia $x \to \sum_i f_i(\mathbf{x}) = \sum_i \alpha_i x_i^2$ este convexă.

Teoremă. *Dacă f este o funcţie convexă pe S şi c este un număr real, atunci $A = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in S, f(\mathbf{z}) \leqslant c\}$ este o submulţime convexă a lui S.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ două puncte din A, adică $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ şi $f(\mathbf{x}) \leqslant c$, $f(\mathbf{y}) \leqslant c$. Notăm cu $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$, $t \in [0, 1]$, un punct arbitrar de pe segmentul care uneşte pe $\mathbf{x}$ cu $\mathbf{y}$. Convexitatea lui f implică $f(\mathbf{z}) = f((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leqslant (1-t) f(\mathbf{x}) + t f(\mathbf{y}) \leqslant (1-t)c + tc = c$, adică $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} = \mathbf{z} \in A$.

Teoremă. *Fie S o mulţime convexă cu interiorul nevid şi $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă. 1) f este continuă pe interiorul lui S. 2) Dacă $\mathbf{x}_0 \in S$ este un punct de pe frontiera lui S, atunci*

$$\liminf_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0).$$

Demonstraţie. 1) Fie $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} S$ şi $B(\mathbf{x}_0; r)$ o bilă deschisă cu centrul în $\mathbf{x}_0$ şi de rază $r > 0$ suficient de mică. Alegem pe c astfel încît mulţimea convexă $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S, f(\mathbf{x}) \leqslant c\}$ să conţină pe $\bar{B}(\mathbf{x}_0; r)$. Fie $\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{x}_0; r)$, $\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{r} = t \in [0, 1]$ şi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} = \mathbf{x}_0 \pm \frac{1}{t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ două puncte din $\bar{B}(\mathbf{x}_0; r)$. Avem $f(\mathbf{y}) = f((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) \leqslant (1-t) f(\mathbf{x}_0) + t f(\mathbf{a}) \leqslant$ $\leqslant (1-t) f(\mathbf{x}_0) + tc$ şi $f(\mathbf{x}_0) = f\left(\frac{1}{1+t}\mathbf{x} + \frac{t}{1+t}\mathbf{b}\right) \leqslant \frac{1}{1+t}(f(\mathbf{x}) + tc)$.

Acestea implică

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leqslant \frac{c - f(\mathbf{x}_0)}{r} \, ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||, \text{ deci } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

2) Fie $\mathbf{x}_0 \in S$ un punct frontiera şi $(1-t)\,\mathbf{x}+t\mathbf{x}_0$, $t \in [0, 1]$, segmentul care uneşte pe $\mathbf{x} \in S$ cu $\mathbf{x}_0$. Avem

$$\liminf_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \leqslant \lim_{t\nearrow 1} f((1-t)\,\mathbf{x} + t\mathbf{x}_0)) \leqslant \lim_{t\nearrow 1}((1-t)\,f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{x}_0)) = f(\mathbf{x}_0).$$

Teoremă. *Fie U o mulţime deschisă şi convexă din $\mathbb{R}^n$, iar $f: U \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă. Funcţia f este convexă dacă şi numai dacă $f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}f(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, adică dacă şi numai dacă hiperplanul tangent la graficul lui f rămîne mereu sub grafic* (fig. 3.1).

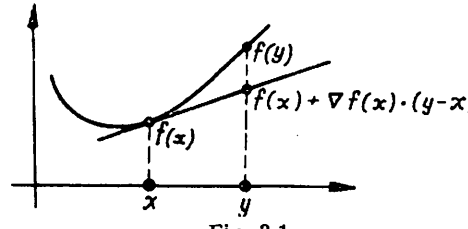


Fig. 3.1

Demonstraţie. Din $f((1-t)\,\mathbf{x}+ty) \leqslant (1-t)\,f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y})$, $t \in (0, 1]$, găsim

$$f(\mathbf{x}) + \frac{f(\mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})}{t} \leqslant f(\mathbf{x}).$$

Trecînd la limită pentru $t \to 0$, $t > 0$, şi ţinînd seama că

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x}))\Big|_{t=0} = \mathrm{d}f(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}),$$

găsim relaţia din teoremă.

Reciproc, să presupunem că $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$,

$$f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}f(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{y}). \tag{3.1}$$

Schimbînd pe $\mathbf{x}$ cu $\mathbf{y}$, deducem că, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$,

$$f(\mathbf{y}) + \mathrm{d}f(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x}). \tag{3.2}$$

Fie $\mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, $t \in [0, 1]$. În (3.1) înlocuim pe $\mathbf{x}$ cu $\mathbf{z}$ şi înmulţim inegalitatea obţinută cu t; în (3.2) înlocuim pe $\mathbf{y}$ cu $\mathbf{z}$ şi înmulţim inegalitatea obţinută cu $1 - t$; adunînd, rezultă

$$f((1-t)\,\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leqslant (1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \text{ şi } \forall t \in [0, 1],$$

adică f este convexă.

Să presupunem că f este de clasa C^2. Formula lui Taylor dă

$$f(\mathbf{x} + \mathrm{d}\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}f(\mathbf{x})(\mathrm{d}\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x} + \tau\mathrm{d}\mathbf{x})(\mathrm{d}\mathbf{x}), \quad \tau \in (0, 1),$$

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n).$$

Astfel, pentru $\|\mathrm{d}\mathbf{x}\|$ suficient de mic, relaţia $f(\mathbf{x}+\mathrm{d}\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x})+\mathrm{d}f(\mathbf{x})(\mathrm{d}\mathbf{x})$ este echivalentă cu $\mathrm{d}^2f(\mathbf{x})(\mathrm{d}\mathbf{x}) \geqslant 0$, $\forall \mathbf{x} \in U$. De aceea avem următoarea

Teoremă. *Fie U o mulţime deschisă şi convexă din $\mathbb{R}^n$, iar $f : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2. Funcţia f este convexă pe U dacă şi numai dacă forma pătratică (hessiana lui f)*

$$\mathrm{d}^2f(\mathbf{x})(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j$$

este pozitiv semidefinită, $\forall x \in U$.

Observaţie. Dacă $\mathrm{d}^2f(\mathbf{x})(\mathbf{dx}) > 0$ pentru $\mathrm{d}x \neq 0$, atunci f este strict convexă într-o vecinătate a lui $\mathbf{x}$. Reciproca nu este adevărată.

Complemente. 1) Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, o matrice simetrică de ordinul n. O funcţie reală de tipul $\mathbf{x} \to {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se numeşte *formă pătratică*. Forma pătratică $\mathbf{x} \to {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}$ se numeşte *pozitiv semidefinită* (*negativ semidefinită*) dacă ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0$ (respectiv $\leqslant 0$), $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Forma pătratică $\mathbf{x} \to {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}$ se numeşte *pozitiv definită* (*negativ definită*) dacă ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ (respectiv < 0), $\forall \mathbf{x} \neq 0$. Forma pătratică ataşată matricei $\mathbf{A}$ este negativ semidefinită (definită) dacă şi numai dacă forma pătratică corespunzătoare lui $-\mathbf{A}$ este pozitiv semidefinită (definită).

Se poate demonstra că $\mathbf{x} \to {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}$ este pozitiv semidefinită (definită) dacă şi numai dacă determinanţii

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

sînt pozitivi (strict pozitivi) sau dacă şi numai dacă valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ sînt pozitive (strict pozitive). De asemenea, ţinînd seama că $\mathrm{d}^2({}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}) = 2\,{}^t(\mathrm{d}\mathbf{x})\, \mathbf{A}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$, rezultă uşor că o formă pătratică este pozitiv semidefinită (definită) dacă şi numai dacă aceasta este o funcţie convexă (strict convexă).

2) Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, o matrice de tipul $m \times n$. Prin $\mathbf{A} \geqslant 0$ înţelegem $a_{ij} \geqslant 0$, $\forall i, j$.

3.1. Să se arate că următoarele mulţimi sînt convexe:

1) $A = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b\}$,

2) $B = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1\}$,

3) $C = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Rezolvare. 1) Dacă $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ sînt două puncte oarecare din A, atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$, $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leqslant b$. Înmulţind prima inegalitate cu $1 - t$, pe a doua cu $t \in [0,1]$, şi adunîndu-le, rezultă $\sum_{i=1}^{n} a_i((1-t)x_i + ty_i) \leqslant b$, adică $((1-t)x_1 + ty_1, \ldots, (1-t)x_n + ty_n) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in A$. Astfel mulţimea A este convexă.

Altfel: mulţimea A este convexă deoarece funcţia $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ este liniară şi deci convexă.

2) Funcţia $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2}$ este convexă fiind o sumă de funcţii convexe. De aceea $B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, f(\mathbf{x}) \leqslant 1\}$ este o mulţime convexă.

3) Fie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ două puncte arbitrare din C; $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i$. Înmulţind prima relaţie cu $1 - t$, pe a doua cu t, şi adunîndu-le, găsim $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[(1-t)x_j + ty_j] = b_i$, echivalentă cu $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in C$.

Altfel: punem $A_i = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\}$, $i =$ fixat. Deoarece $\mathbf{x} \to f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ este o funcţie liniară, mulţimea A_i este convexă. Pe de altă parte $C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ şi deci C este convexă.

3.2. Să se demonstreze că funcţia

$$(x, y) \to f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2 - 5x - 4y$$

este convexă.

Rezolvare. Se observă că f este suma dintre $(x, y) \to h(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ şi $(x, y) \to g(x, y) = -5x - 4y$. Funcţia h este convexă fiind o formă pătratică pozitiv definită: $1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{11}{4} > 0$. Funcţia g este liniară şi deci convexă. De aceea $f = h + g$ este convexă.

3.3. Să se verifice că $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$ este concavă pentru $x > 0$ şi convexă pentru $x < 0$.

Rezolvare. Succesiv găsim $\frac{1}{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$, $\frac{df}{f^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{x_i^2}$, $\frac{d^2f}{f^2} - 2\frac{df^2}{f^3} = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i^2}{x_i^3}$, $\frac{1}{2}\frac{d^2f}{f^3} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{x_i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i^2}{x_i^3}\right)$.

Folosind inegalitatea lui Cauchy $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ cu $a_i = (\varepsilon x_i)^{-1/2}$, $b_i = (\varepsilon x_i^3)^{-1/2}\, dx_i$, unde

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 \text{ pentru } x_i < 0, \\ +1 \text{ pentru } x_i > 0, \end{cases}$$

rezultă pentru $x_i > 0$, $d^2 f \leqslant 0$ și deci restricția lui f la $\{\mathbf{x} \mid x_i > 0\}$ este concavă; pentru $x_i < 0$, $d^2 f \geqslant 0$, și deci restricția lui f la $\{\mathbf{x} \mid x_i < 0\}$ este convexă.

3.2. Valori extreme și programe

Fie S o submulțime din $\mathbb{R}^n$ și $f : S \to \mathbb{R}$ o funcție cu valori reale. Deoarece mulțimea valorilor $f(S)$ este inclusă în dreapta reală, relația de ordine permite introducerea noțiunilor de *funcție minorată sau majorată, funcție mărginită* și *marginile unei astfel de funcții*. Proprietățile marginilor unei funcții reale de mai multe variabile reale sînt aceleași ca și pentru funcțiile reale de o singură variabilă (vezi §2.1 și §2.2).

În ipoteza că există, minimul sau maximul lui $f(S)$ se numesc *minimul*, respectiv *maximul global* al lui f, iar punctele din S în care sînt atinse aceste valori se numesc *puncte de minim* sau *maxim global*. Astfel notațiile $\min f(S)$, $\max f(S)$, sînt echivalente respectiv cu $\min\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$, $\max\limits_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x})$.

Teoremă. *Dacă $S \subset \mathbb{R}^n$ este o mulțime compactă, iar $f : S \to \mathbb{R}$ este continuă pe S, atunci f este mărginită și își atinge marginile, adică $\exists \mathbf{x}_m$, $\mathbf{x}_M \in S$ astfel încît $\underline{f} = f(\mathbf{x}_m) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_M) = \bar{f}$, $\forall \mathbf{x} \in S$.*

Demonstrație. Să arătăm mai întîi că $f(S)$ este compactă. Pentru aceasta fie $\{y_n\}$ un șir din $f(S)$. Alegem $\mathbf{x}_n \in S$ astfel încît $f(\mathbf{x}_n) = y_n$. Deoarece S este compactă, șirul $\{\mathbf{x}_n\}$ posedă un subșir convergent $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$ cu limita $\mathbf{x}_0$ în S. Ținînd seama că f este continuă, găsim $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_{n_k}) = f(\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_{n_k}) = f(\mathbf{x}_0) \in f(S)$. Astfel, șirul $\{y_n\}$ posedă un subșir $\{y_{n_k}\}$ convergent către o limită din $f(S)$. Deoarece $\{y_n\}$ este arbitrar, rezultă că $f(S)$ este compactă, deci închisă și mărginită. Fie $m = \inf f(S)$; punctul m este un punct aderent pentru mulțimea $f(S)$ și deoarece $f(S)$ este închisă, rezultă $m \in f(S)$, adică $\exists \mathbf{x}_m \in S$ astfel încît $m = f(\mathbf{x}_m)$. Analog, se procedează pentru $M = \sup f(S)$ și găsim $M = f(\mathbf{x}_M)$.

În ipoteza că $f(S)$ este mulțime închisă, dacă există, infimumul și supremumul lui f coincid respectiv cu extremele globale ale lui f.

Fie $S \subset \mathbb{R}^n$ și $f : S \to \mathbb{R}$. Un punct $\mathbf{x}_0 \in S$ se numește *punct de minim (maxim) local pentru f* dacă există o vecinătate V al lui $\mathbf{x}_0$, astfel încît $f(\mathbf{x}) \geqslant (\leqslant) f(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{x} \in V \cap S$. Valoarea $f(\mathbf{x}_0)$ se numește *minim (respectiv) maxim local*. Punctele de minim sau maxim se mai numesc și *puncte de extrem*, iar minimul sau maximul se mai numesc *extreme* sau *valori optime*; cînd este cazul, se adaugă atributul *„local"* sau *„global"*.

Observaţii. 1) Punctele de extrem ale lui $f > 0$ sînt puncte de extrem (de acelaşi tip) şi pentru funcţiile f^2, $\sqrt{f}$, $1/f$, e^f etc.

2) Punctul $x_0 \in S$ este un punct de minim pentru f dacă şi numai dacă este un punct de maxim pentru $-f$.

Extremele globale sînt şi locale, dar cele locale nu sînt globale decît pentru unele funcţii particulare. De exemplu, extremele locale ale funcţiilor convexe sînt şi extreme globale. Pentru a arăta acest lucru, fie S o mulţime convexă din $\mathbb{R}^n$ şi $f: S \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă. Presupunem că $x_0 \in S$ este un punct de minim local, adică există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall x \in V \cap S$. Deoarece S este convexă, putem alege pe $\varepsilon < 1$ suficient de mic astfel încît porţiunea $t \in [0, \varepsilon]$ din orice segment $(1 - t)x_0 + tx$ ce uneşte pe x_0 cu $x \in S$ să se afle în $V \cap S$. În această ipoteză, avem $f(x_0) \leqslant f((1-t)x_0 + tx)$, $0 < t < \varepsilon$. Pe de altă parte, f este convexă, adică $f((1-t)x_0 + tx) \leqslant (1-t)f(x_0) + tf(x)$, $0 < t < \varepsilon$. Găsim $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall x \in S$, adică orice punct de minim local x_0 este un punct de minim global pe S.

Deoarece orice punct de minim global este un punct de minim local, rezultă că pentru o funcţie convexă mulţimea punctelor de minim local coincide cu mulţimea punctelor de minim global.

Fie x_1, x_2 două puncte de minim ale funcţiei convexe f. Deoarece ambele sînt puncte de minim global, deducem $f(x_1) \leqslant f(x_2)$; $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ şi deci $f(x_1) = f(x_2)$; astfel minimul lui f este unic.

Teoremă. *Mulţimea punctelor de minim ale unei funcţii convexe este convexă.*

Demonstraţie. Dacă f nu are o valoare minimă pe S, atunci mulţimea punctelor de minim este vidă şi deci convexă. Dacă f are un minim m pe S, atunci mulţimea punctelor de minim este intersecţia a două mulţimi convexe, $S \cap \{x \mid x \in S, f(x) \leqslant m\}$, şi deci este convexă.

Consecinţă. *Dacă mulţimea punctelor de minim ale unei funcţii convexe are cel puţin două puncte, atunci are o infinitate, iar funcţia nu este strict convexă.*

Demonstraţie. Dacă x şi y sînt puncte de minim, atunci, după teorema precedentă, orice punct al unui segment care uneşte pe x şi y este un punct de minim pentru f. În plus,

$$f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y) = f(x) = f(y), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Teoremă. *Dacă o funcţie convexă $f: S \to \mathbb{R}$ are un punct de maxim global în interiorul lui S, atunci f este o constantă.*

Demonstraţie. Presupunem că x_0 este un punct de maxim global pentru f pe S, adică $f(y) \leqslant f(x_0)$, $\forall y \in S$, şi că x_0 este un punct interior al lui S. Alegem pe $x \in S$ astfel încît x_0 să fie un punct interior al segmentului care uneşte pe x cu y. Aceasta înseamnă că $\exists s \in (0, 1)$ astfel încît

$(1-s)\mathrm{x}+s\mathrm{y}=\mathrm{x}_0$. Rezultă $f(\mathrm{x}_0) \leqslant (1-s)f(\mathrm{x})+sf(\mathrm{y})$. Deoarece x_0 este un punct de maxim global, avem $f(\mathrm{x}) \leqslant f(\mathrm{x}_0)$. Dacă $f(\mathrm{y}) < f(\mathrm{x}_0)$, atunci $f(\mathrm{x}_0) < (1-s)f(\mathrm{x}_0)+sf(\mathrm{x}_0)=f(\mathrm{x}_0)$, care este o contradicție. Rămîne $f(\mathrm{y})=f(\mathrm{x}_0)$, $\forall \mathrm{y} \in S$.

Observații. 1) Dacă funcția convexă f nu este o constantă, atunci punctele de maxim global se află eventual pe frontiera mulțimii convexe S.

2) Dacă un punct din S este simultan punct de minim și de maxim global pentru funcția convexă $f: S \to \mathbb{R}$, atunci $f=\text{const}$.

O problemă care constă în găsirea optimului (minimului sau maximului) lui f pe S sau pe o submulțime a lui S se numește *problemă de programare*, sau, mai scurt, *program*. Funcția f se numește *obiectiv*.

Dacă partea lui S la care se referă programul este de forma

$$\{\mathrm{x} \mid \varphi_k(\mathrm{x})=0,\ k=1,2,\ldots,q;\ \psi_l(\mathrm{x}) \geqslant 0,\ l=1,2,\ldots,r\} \subseteq S,$$

unde φ_k, ψ_l sînt funcții definite pe submulțimi din $\mathbb{R}^n$, atunci relațiile $\varphi_k(\mathrm{x})=0$, $\psi_l(\mathrm{x}) \geqslant 0$ se numesc *restricții*, iar extremele lui f se numesc *extreme cu restricții*.

Restricția $\psi_l(\mathrm{x}) \geqslant 0$ se numește *activă în punctul* x_0 dacă $\psi_l(\mathrm{x}_0)=0$. Vom nota mulțimea indicilor l, pentru care $\psi_l(\mathrm{x}) \geqslant 0$ sînt active în x_0, prin $\mathcal{L}(\mathrm{x}_0)$. Restricțiile egalități și restricțiile inegalități active în punctele de extrem se numesc *legături*. De aceea uneori în loc de denumirea generală *extreme cu restricții* vom întrebuința denumirea *extreme cu legături*. Dacă în problema de programare nu avem restricții egalități, iar restricțiile de forma $\psi_l(\mathrm{x}) \geqslant 0$ nu există sau sînt inactive în punctele de extrem, atunci extremele se numesc *libere*.

Ne vom referi în special la probleme în care funcțiile f, φ_k, ψ_l sînt funcții diferențiabile. În această ipoteză extremele libere pot fi tratate ca extreme pe mulțimi deschise, iar cele cu legături ca extreme pe părți ale unor mulțimi deschise. Restricțiile $\varphi_k(\mathrm{x})=0$, $\psi_l(\mathrm{x}) \geqslant 0$ se numesc regulate în punctul x_0 dacă vectorii $\nabla\varphi_k(\mathrm{x}_0)$ și $\nabla\psi_l(\mathrm{x}_0)$, $l \in \mathcal{L}(\mathrm{x}_0)$, sînt liniar independenți.

Observații. 1) Deoarece $\min\limits_{\mathrm{x}\in S} f(\mathrm{x}) = -\max\limits_{\mathrm{x}\in S}(-f(\mathrm{x}))$, orice problemă de maxim se poate reduce la una de minim.

2) Inegalitățile de forma $\geqslant$ pot fi transformate în inegalități de forma $\leqslant$ prin înmulțirea cu -1.

3) Inegalitățile $\geqslant$ sau $\leqslant$ pot fi transformate în egalități prin scăderea sau adăugarea unei noi variabile nenegative.

Aceste observații arată că pentru înțelegerea esenței problemelor de optimizare este suficient să dăm explicații teoretice amănunțite numai pentru o problemă de minim cu restricții egalități sau inegalități de forma $\geqslant$.

4) În orice problemă de extrem ne interesează cel puțin cinci aspecte: *formularea condițiilor necesare, formularea condițiilor suficiente, problema existenței soluției, problema unicității soluției, determinarea efectivă a soluției.*

Dacă f, φ_k, ψ_l sînt funcții liniar afine, atunci problema de programare se numește *liniară* (vezi § 3.8) și în caz contrar se numește *neliniară*.

Dacă f este o formă pătratică afină, iar φ_k, ψ_l sînt liniar afine, atunci problema de programare se numește *pătratică* (vezi cap. 6).

Dacă f, φ_k şi ψ_l sînt pozinoame, atunci problema de programare se numeşte *pozinomială* (vezi cap. 7).

Observaţii. 1) Să presupunem că funcţia obiectiv este liniară, adică $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Fie $M_f : \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = f$ familia hiperplanelor de nivel ataşate lui f. Deoarece distanţa d de la origine la M_f este $d = \frac{|f|}{\sqrt{c_1^2 + \ldots + c_n^2}}$, rezultă că extremele lui f pe S sînt proporţionale cu extremele lui d pe S, încît extremele lui f nu pot fi atinse decît în puncte comune lui S şi unui hiperplan din familia M_f.

2) Fie funcţia obiectiv $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$ căreia i se ataşază familia de hipersfere de nivel, concentrice, $M_f : \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = f$, care au centrul în origine şi raza $\sqrt{f}$. Distanţa d de la origine la M_f este $d = \sqrt{f}$. De aceea, dacă există, optimul lui f pe S se atinge într-un punct comun lui S şi unei hipersfere din familia M_f.

Exemplu de program liniar. Să se găsească maximul lui $f(x, y) = x + y$ cu restricţiile $y \leqslant 4$, $2x + y \leqslant 15$, $x - y \leqslant 4$, $x, y \geqslant 0$.

Rezolvare. Desenînd dreptele $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $2x + y = 15$, $x - y = 4$, obţinem pentagonul $OABCD$ (fig. 3.2). Punctele din interiorul şi de pe laturile acestui pentagon satisfac inegalităţile date. Pe de altă parte, ecuaţia $x + y = f$ reprezintă un fascicul de drepte paralele. Pentru a obţine maximul lui f, dreapta variabilă $x + y = f$ trebuie mişcată în sensul indicat de grad $f = \vec{i} + \vec{j}$, deoarece gradientul dă direcţia şi sensul creşterii maxime (vezi § 3.3). Se observă că $\max f = 9{,}5$ şi această valoare este atinsă în punctul $C(11/2, 4)$.

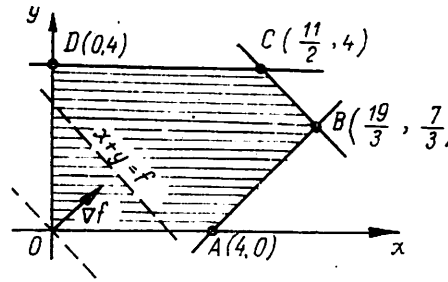


Fig. 3.2

Precizare. În general se poate demonstra că pentru a rezolva un program liniar este suficient să examinăm numai vîrfurile hiperpoliedrului restricţiilor (vezi § 3.8).

Exemplu de program neliniar. Să se găsească minimul funcţiei $z = (x - 7)^2 + (y - 3)^2$ pe mulţimea de puncte care satisface restricţiile $x + 2y \leqslant 10$, $x - y \geqslant -1$, $x, y \geqslant 0$.

Rezolvare. Desenînd dreptele $x + 2y = 10$, $x - y = -1$, $x = 0$, $y = 0$, obţinem patrulaterul $OABC$ (fig. 3.3). Punctele din interiorul şi de pe laturile acestui patrulater satisfac restricţiile problemei. Evident z reprezintă pătratul distanţei dintre $D(7, 3)$ şi $M(x, y)$. De aceea z este minim cînd distanţa $d(D, M)$ este minimă. Astfel

$$\min z = (\min_M d(D, M))^2 = (d(D\,;AB))^2 = 9/5.$$

Dreapta AB are ecuaţia $x + 2y = 10$. Perpendiculara pe AB dusă prin D are ecuaţia $y - 3 = 2(x - 7)$. Deci coordonatele punctului de minim M_0 sînt soluţiile sistemului $x + 2y = 10$, $y - 3 = 2(x - 7)$, adică $x_0 = 32/5$, $y_0 = 9/5$. Aici numai restricţia $x + 2y \leqslant 10$ este activă,

3.4. 1) Fie $I = [0,1]$ şi $f : I \times I \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x, y) = (x - y)^2$. Funcţiei f i se asociază alte două funcţii m_f, M_f, definite pe I cu valori reale, în modul următor:

$$m_f(y) = \min_{x \in I} f(x, y), \quad M_f(x) = \max_{y \in I} f(x, y).$$

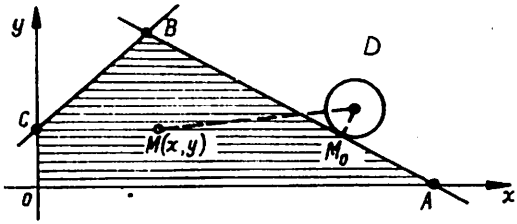


Fig. 3.3

Să se determine numerele $\max\limits_{y\in I} m_f(y)$ şi $\min\limits_{x\in I} M_f(x)$.

2) Dacă U şi V sînt două mulţimi finite şi dacă $g: U\times V\to \mathbb{R}$ este o funcţie cu valori reale, care este legătura dintre numerele $\min\limits_{u\in U}(\max\limits_{v\in V} g(u, v))$, $\max\limits_{v\in V}(\min\limits_{u\in U} g(u, v))$?

Rezolvare. 1) Se observă că $f(x, y) = f(y, x) = (x-y)^2$ este un trinom în x (sau în y). Deci

$$m_f(y) = \min_{x\in I} f(x, y) = f(y, y) = 0$$

şi

$$M_f(x) = \max_{y\in I} f(x. y) = \max\{f(x, 1) = (x-1)^2, f(x, 0) = x^2\} =$$

$$= \begin{cases} (x-1)^2, & x\in[0, 1/2], \\ x^2, & x\in(1/2, 1]. \end{cases}$$

Deducem $\max\limits_{y\in I} m_f(y) = 0$, $\min\limits_{x\in I} M_f(x) = M_f(1/2) = 1/4$. Acest rezultat era de aşteptat întrucît $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y\in I$ şi deci $\max\limits_{y\in I}\min\limits_{x\in I} f(x, y) < \min\limits_{x\in I}\max\limits_{y\in I} f(x, y)$.

2) Mulţimea $U\times V$ este finită şi deci imaginea $g(U\times V)$ este finită. Deoarece $\min\limits_{u} g(u,v) < g(u,v) < \max\limits_{v} g(u,v)$, rezultă $\max\limits_{v}\min\limits_{u} g(u, v) < \min\limits_{u}\max\limits_{v} g(u,v)$.

3.5. Fie polinoamele simetrice $s_1(\mathrm{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $s_2(\mathrm{X}) = \sum\limits_{i<j} x_i x_j$, $s_3(\mathrm{X}) = \sum\limits_{i<j<k} x_i x_j x_k, \ldots,$ unde $\mathrm{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. În ipoteza că x_i sînt numere reale pozitive, să se determine $\sup\limits_{(x,n)} \dfrac{s_m(\mathrm{X})}{[s_1(\mathrm{X})]^m}$.

(Amer. Math. Monthly, 1976).

Rezolvare. În dezvoltarea $[s_1(\mathrm{x})]^m = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m$ toţi termenii sînt nenegativi, iar unii dintre ei sînt egali cu termenii lui $s_m(\mathrm{x})$ multiplicaţi cu $m!$. De aceea $\dfrac{s_m(\mathrm{x})}{[s_1(\mathrm{x})]^m} < \dfrac{1}{m!}$, adică $\dfrac{1}{m!}$ este un majorant pentru $\dfrac{s_m(\mathrm{x})}{[s_1(\mathrm{x})]^m}$. Vom arăta că este cel mai mic majorant. Dacă considerăm $x_1 = x_2, \ldots, = x_n = 1$, găsim

$$\frac{s_m}{s_1^m} = \frac{C_n^m}{n^m} = \frac{n(n-1)\ldots n-m+1)}{m!\,n^m} = \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_m}{s_1^m} = \dfrac{1}{m!}$, ceea ce dovedeşte că supremumul căutat este $\dfrac{1}{m!}$.

3.6. Fie funcţia definită prin $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$. Să se arate că deşi f are un minim de-a lungul oricărei drepte ce trece prin origine, punctul (0,0) nu este un punct de minim pentru f.

Rezolvare. Considerăm dreapta $x = 0$. Se observă că $f(0, y) = y^4$ are un minim în $y = 0$. Fie $y = mx$ dreptele oblice ce trec prin origine. Restricţia lui f la aceste drepte este $g(x) = f(x, mx) = x^2(1 - m^2x)(2 - m^2x)$. Deoarece $\frac{dg}{dx}(0) = 0$, $\frac{d^2g}{dx^2}(0) = 4 > 0$, punctul $x = 0$ este un punct de minim.

Să cercetăm dacă (0,0) este sau nu un punct de extrem pentru f; $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Avem $f(0, 0) = 0$, dar $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ nu păstrează semn constant într-o vecinătate a lui (0 0); de exemplu, pentru orice punct din regiunea I, fig. 3.4, se găseşte $f(x, y) < 0$, iar pentru orice punct din II avem $f(x, y) > 0$. De aceea (0,0) nu este punct de minim pentru f.

3.7. Utilizînd definiţia, să se găsească punctele de extrem ale funcţiei definite prin $f(x, y) = x^2 - y^3$ pe D: $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

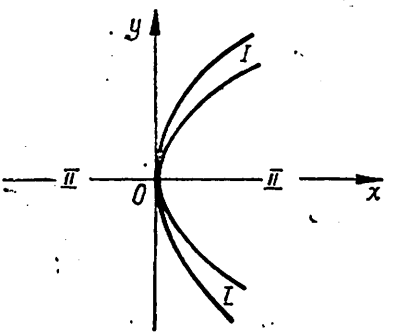


Fig. 3.4

Rezolvare. Fie (x_0, y_0) un punct din interiorul lui D, adică $x_0^2 + y_0^2 < 1$. Deoarece funcţia parţială $y \to f(x_0, y) = x_0^2 - y^3$ nu are extrem în y_0, rezultă că (x_0, y_0) nu poate fi punct de extrem pentru f.

Presupunem că $x^2 + y^2 = 1$. Rezultă $x^2 = 1 - y^2$ şi $g(y) = f(x(y), y) = 1 - y^2 - y^3$, $y \in [-1, 1]$. Deoarece $\frac{dg}{dy} = -2y - 3y^2$ şi $\frac{d^2g}{dy^2} = -2 - 6y$, punctul $y = 0$ este un punct de maxim, iar $y = 2/3$ este un punct de minim.

Apoi $g(-1) = 1$, $g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{27}$, $g(0) = 1$, $g(1) = -1$ arată că $-1 \leqslant g(y) \leqslant 1$, $\forall y \in [-1,1]$, adică punctul $y = 1$ este un punct de minim global, punctul $y = -2/3$ este un punct de minim local, iar punctele $y = -1$ şi $y = 0$ sînt puncte de maxim global. În concluzie $-1 \leqslant f(x, y) \leqslant 1$, minimul atingîndu-se în $x = 0$, $y = 1$ iar maximul în $x = 0$, $y = -1$ şi $x = \pm 1$, $y = 0$.

3.8. Fie constantele a, b, c astfel încît $0 < a < b < c$ şi funcţia reală f definită prin $f(x, y, z) = x^a + y^b + z^c$. Să se determine extremele lui f pe mulţimea $S = \{x^b + y^b + z^b = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$.

(Amer. Math. Monthly, 1976)

Rezolvare. Fie $h(x) = x^a - x^b$ şi $k(z) = z^c - z^b$. Punctele de extrem ale lui f dau şi extremele funcţiei $(x, z) \to g(z, z) = (x^a + y^b + z^c) - (x^b + y^b + z^b) = h(x) + k(z)$ pe domeniul D obţinut prin proiecţia lui S pe planul xOz. Pentru punctele din D atît x cît şi z sînt din $[0,1]$. Utilizînd derivata h', se constată că h creşte de la $h(0) = 0$ la un maxim ce se atinge în $x_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/(b-a)}$ şi apoi scade la $h(1) = 0$. Analog, k descreşte de la $k(0) = 0$ la un minim ce se atinge în $z_0 = \left(\frac{b}{c}\right)^{1/(c-b)}$ şi apoi creşte la $k(1) = 0$. Deoarece $(1, z_0)$ şi $(x_0, 1)$ nu aparţin lui D, funcţia f îşi atinge maximul numai în $(x, y, z) = (x_0, (1 - x_0^b)^{1/b}, 0)$ şi minimul numai în $(0, 1 - z_0^b)^{1/b}, z_0)$.

3.3. Extreme libere

Fie U o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$, și $f: U \to \mathbb{R}$ o funcție cu valori reale (*cîmp scalar*), diferențiabilă pe U. Funcției f îi atașăm *cîmpul vectorial*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{U}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \mathbf{U}_n,$$

numit *gradientul lui* f; $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_n$ sînt *cîmpurile vectoriale fundamentale.*

Gradientul este un cîmp vectorial normal la oricare dintre hipersuprafețele de nivel $M_c: f(x_1, \ldots, x_n) = c$ (fig. 3.5). Pentru a dovedi acest lucru, fie $\alpha: x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ o curbă arbitrară de pe hipersuprafața M_c. Derivînd identitatea $f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv c$ în raport cu t, găsim $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} = 0$ sau $\nabla f \cdot \alpha' = 0$, adică $\nabla f \perp \alpha'$, $\forall \alpha$.

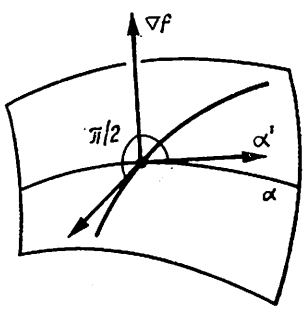


Fig. 3.5

Fie $\mathbf{v}$ un vector tangent la U în punctul $\mathbf{x}$. Alegem pe $t \in \mathbb{R}$ astfel încît $\mathbf{x} + t\mathbf{v} \in U$. Derivata lui f în raport cu $\mathbf{v}$,

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \mathrm{d}f(\mathbf{x})(\mathbf{v}),$$

indică cantitativ schimbarea lui $f(\mathbf{x})$ cînd $\mathbf{x}$ se mișcă în sensul vectorului $\mathbf{v}$ pe dreapta determinată de punctul $\mathbf{x}$ și de vectorul $\mathbf{v}$. Utilizînd inegalitatea lui Schwarz

$$|D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})| = |\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}| \leqslant \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

în care egalitatea are loc dacă și numai dacă $\nabla f(\mathbf{x})$ și $\mathbf{v}$ sînt coliniari, rezultă că $\mathbf{v} \to D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$ are un minim (maxim) egal respectiv cu $-\|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ ($\|\nabla f(\mathbf{x})\| \, \|\mathbf{v}\|$) dacă $\mathbf{v}$ are sensul și direcția lui $-\nabla f(\mathbf{x})$ (respectiv $\nabla f(\mathbf{x})$). Astfel, $-\nabla f(\mathbf{x})$ (respectiv $\nabla f(\mathbf{x})$) indică local direcția și sensul în care f descrește (crește) cel mai repede.

Dacă există un vector $\mathbf{v}$ astfel încît $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) > 0$, atunci proprietățile limitei arată că există un $t_0 > 0$ astfel încît pentru toți $t \in [0, t_0]$ să avem $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) > f(\mathbf{x})$. Cu alte cuvinte, dacă $\nabla f(\mathbf{x}) \neq 0$ și dacă prin $\mathbf{v}$ înțelegem un vector legat în punctul $\mathbf{x}$, iar prin $I = (\mathbf{x}, \mathbf{x} + t_0\mathbf{v})$, $t_0 > 0$, înțelegem un interval de pe dreapta determinată de punctul $\mathbf{x}$ și vectorul $\mathbf{v}$, atunci pentru orice vector $\mathbf{v}$ care face cu $\nabla f(\mathbf{x})$ (respectiv cu $-\nabla f(\mathbf{x})$) un unghi mai mic decît $\pi/2$ există un interval I astfel încît $f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x})$ ($f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$), $\forall \mathbf{y} \in I$, adică, local, direcția orientată $\mathbf{v}$ este o direcție pe care f crește (descrește).

Vom da o condiţie necesară pentru punctele de extrem liber. Pentru aceasta introducem noţiunea de punct critic. Fie $f: U \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă. Zerourile gradientului ∇f, adică soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad (x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{x} \in U,$$

se numesc *puncte critice* ale funcţiei f, iar numărul $f(\mathrm{x}_0)$ se numeşte valoarea critică a lui f. Pentru a avea o imagine asupra punctelor critice ale lui f utilizăm fie forma graficului lui f într-o vecinătate a unui asemenea punct, fie forma hipersuprafeţelor de nivel ale lui f.

Teorema lui Fermat. *Dacă $f: U \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă şi $\mathrm{x}_0 \in U$ este un punct de extrem local, atunci $\nabla f(\mathrm{x}_0) = 0$, adică x_0 este un punct critic al lui f.*

Demonstraţie. Procedăm prin reducere la absurd. Dacă $\nabla f(\mathrm{x}_0)$ ar fi diferit de vectorul nul, atunci într-o vecinătate a lui x_0 pe direcţia $\mathrm{v} = \nabla f(\mathrm{x}_0)$ funcţia f ar creşte, iar pe direcţia $\mathrm{v} = -\nabla f(\mathrm{x}_0)$ funcţia f ar descreşte. Deci x_0 nu ar fi punct de extrem local.

Consecinţă. *O funcţie diferenţiabilă pe o mulţime compactă îşi atinge marginile sau într-un punct critic sau într-un punct de pe frontieră.*

Observaţie. O formulare mai generală a teoremei lui Fermat este următoarea: dacă x_0 este un punct de extrem local al funcţiei f, atunci în acest punct derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sînt nule sau nu există. De exemplu, funcţia definită prin $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ are minimul (global) zero în punctul $x = 0$, $y = 0$, iar $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ nu există.

O condiţie suficientă pentru existenţa punctelor de extrem global este dată de următoarea

Teoremă. *Fie U o mulţime deschisă şi convexă din $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă (concavă) şi diferenţiabilă pe U. Dacă x_0 este un punct critic, atunci x_0 este un punct de minim (maxim) global.*

Demonstraţie. În ipotezele U convexă, f convexă şi diferenţiabilă în $\mathrm{x}_0 \in U$, avem

$$f(\mathrm{x}_0) + \nabla f(\mathrm{x}_0) \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \leqslant f(\mathrm{x}), \ \forall \mathrm{x} \in U.$$

Dacă x_0 este un punct critic, adică $\nabla f(\mathrm{x}_0) = 0$, atunci $f(\mathrm{x}_0) \leqslant f(\mathrm{x})$, $\forall \mathrm{x} \in U$ şi deci x_0 este un punct de minim global pe U.

Teoremă. *Fie U o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ și $f: U \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^p, $p \geqslant 2$.*

1) *Dacă $x_0 \in U$ este un punct de extrem local, atunci $d^2f(x_0)(dx)$ este (pozitiv sau negativ) semidefinită.*

2) Fie x_0 *un punct critic. Dacă $d^2f(x_0)(dx)$ este pozitiv (negativ) definită, atunci x_0 este un punct de minim (maxim) local.*

Demonstrație. Pentru ambele părți ale teoremei utilizăm formula lui Taylor $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} d^2f(x_0 + \tau(x - x_0))(x - x_0)$, unde $\tau \in (0,1)$. 1) Presupunem că x_0 este un punct de extrem local, adică $f(x) \geqslant (\leqslant) f(x_0)$, $\forall x$ dintr-o vecinătate a lui x_0. În baza teoremei lui Fermat x_0 este un punct critic, adică $df(x_0) = 0$. Din formula lui Taylor și din continuitatea diferențialei de ordinul doi rezultă $d^2f(x_0)(dx) \geqslant (\leqslant) 0$. O consecință imediată a acestei părți a teoremei este faptul că dacă $d^2f(x_0)(dx)$ nu are semn constant, atunci x_0 nu poate fi punct de extrem local.

2) În baza continuității, d^2f va fi pozitiv (negativ) definită și într-o vecinătate a lui x_0. De aceea formula lui Taylor dă $f(x) > (<) f(x_0)$ pentru orice x dintr-o vecinătate a lui x_0, adică x_0 este unicul punct de extrem local.

3.3.1. *Extremele locale ale unei funcții de două variabile.* Fie funcția $(x, y) \to f(x, y)$ de clasă C^p, $p \geqslant 2$. Punctele critice ale funcției $(x, y) \to f(x, y)$ sînt soluțiile sistemului $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct critic. Calculăm $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ și

$$d^2f(M_0)(dx, dy) = r_0 dx^2 + 2s_0 dx dy + t_0 dy^2.$$

Se disting următoarele cazuri posibile:

$d^2f(M_0)(dx, dy) > 0 \Leftrightarrow r_0 > 0, r_0t_0 - s_0^2 > 0 \Rightarrow M_0$ este punct de minim,

$d^2f(M_0)(dx, dy) < 0 \Leftrightarrow r_0 < 0, r_0t_0 - s_0^2 > 0 \Rightarrow M_0$ este punct de maxim.

Dacă $r_0t_0 - s_0^2 < 0$, atunci $d^2f(M_0)(dx, dy)$ nu păstrează semn constant și deci M_0 nu poate fi extrem local. Dacă $r_0t_0 - s_0^2 = 0$, adică $d^2f(M_0)(dx, dy)$ este semidefinită, atunci pentru a stabili dacă M_0 este sau nu punct de extrem facem apel fie la studiul direct al funcției, fie la utilizarea derivatelor de ordin superior în (x_0, y_0), fie la cercetarea convexității pe tot domeniul de definiție etc.

Exemple. 1. Pentru funcția $(x, y) \to f(x, y) = a(x^2 + y^2)$, condițiile necesare $\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ay = 0$ arată că originea $(0, 0)$ este un punct critic, iar condiția sufi-

cientă $r_0t_0 - s_0^2 = 4a^2$ precizează că punctul critic este punct de extrem; pentru $r_0 = 2a \lhd 0$ originea este un *punct de maxim* (fig. 3.6), iar pentru $r_0 = 2a \rhd 0$ originea este un *punct de minim* (fig. 3.7).

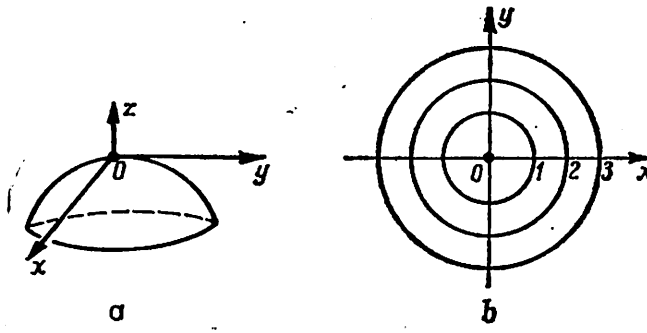


Fig. 3.6

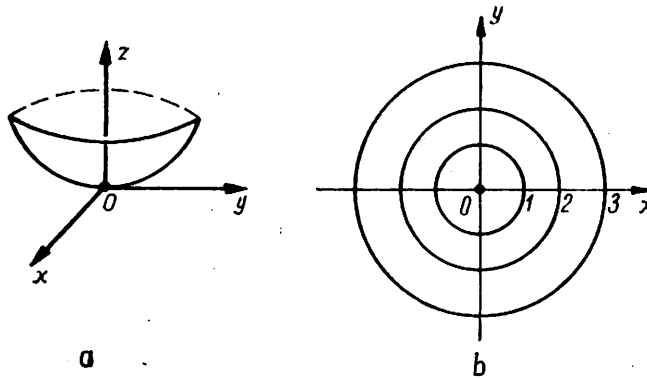


Fig. 3.7

2. Originea este un punct critic al funcției $(x, y) \to f(x, y) = xy$. Se constată însă că $r_0t_0 - s_0^2 = -1 \lhd 0$ și de aceea (0,0) nu este punct de extrem pentru f. Punctul critic al funcției f se numește *punct șa* (fig. 3.8).

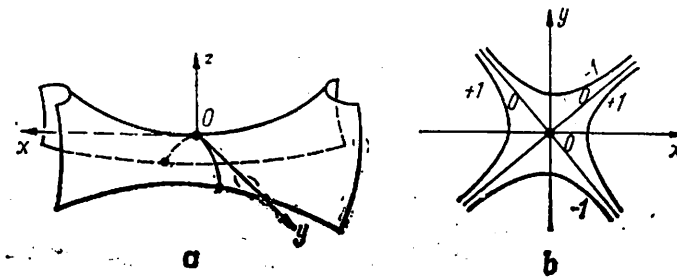


Fig. 3.8

3. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcția ale cărei valori sînt $f(x, y) = (x+1)^{2n} + (y-2)^{2m}$, unde $n, m \in \mathbb{N}$. Se constată că $M_0(-1,2)$ este un punct critic al lui f în care $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$, adică $d^2f(M_0)$ este semidefinită. Pentru precizarea naturii punctului M_0 recurgem la definiția punctului de extrem; evident $f(x, y) - f(-1,2) = (x+1)^{2n} + (y-2)^{2m} \geqslant 0$, și deci $M_0(-1,2)$ este un punct de minim, iar $f_{\min} = f(-1,2) = 0$.

3.9. Să se găsească punctele critice și să se stabilească natura lor pentru funcția $(x, y) \to f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Rezolvare. Din sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

rezultă punctele critice $M_1(1, 2)$, $M_2(2, 1)$, $M_3(-1, -2)$ și $M_4(-2, -1)$.

Expresia hessianei lui f este

$$\frac{1}{6} d^2f(x, y)(dx, dy) = x\,dx^2 + 2y\,dx\,dy + x\,dy^2.$$

Ei îi atașăm determinanții

$$\Delta_1(x,y) = x, \quad \Delta_2(x,y) = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 - y^2.$$

În punctele M_i, $i = 1, 3$, avem $\Delta_2(M_i) = -3 < 0$, adică $d^2f(M_i)$ nu păstrează semn constant. De aceea M_1 și M_3 nu sînt puncte de extrem. Pentru M_2 găsim $\Delta_1(M_2) = 2 > 0$, $\Delta_2(M_2) = 3 > 0$, adică $d^2f(M_2)$ este pozitiv definită. Rezultă că M_2 este un punct de minim local și $f_{\min} = f(2, 1) = -28$. În punctul M_4 găsim $\Delta_1(M_4) = -2 < 0$, $\Delta_2(M_4) = 3 > 0$, adică $d^2f(M_4)$ este negativ definită. Deci M_4 este un punct de maxim local și $f_{\max} = f(-2, -1) = 28$.

3.10. Să se cerceteze extremele funcției definite prin

$$f(x, y) = \cos x \cos y \cos(x + y), \quad (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi].$$

Rezolvare. Funcția f este de clasa C^∞ pe $[0, \pi] \times [0, \pi]$, întrucît este restricția funcției de clasă C^∞ definită pe $(-\varepsilon, \pi + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \pi + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, prin $(x, y) \to \cos x \cos y \cos(x + y)$, funcție pe care o vom nota cu F. Punctele critice ale lui f sînt $(0, 0)$, $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, \pi/2)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/3, \pi/3)$ și $(2\pi/3, 2\pi/3)$. Primele șapte se află pe frontiera lui $[0, \pi] \times [0, \pi]$, iar ultimele trei sînt puncte interioare. Evident, toate acestea sînt puncte critice pentru F și pentru a rezolva problema inițială este suficient să cercetăm dacă punctele critice ale lui F sînt sau nu puncte de extrem.

Se constată că d^2F nu păstrează semn constant în punctele $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi/2)$, adică aceste puncte nu sînt puncte de extrem pentru F și deci nici pentru f. Apoi, d^2F este pozitiv definită în $(\pi/3, \pi/3)$, $(2\pi/3, 2\pi/3)$, adică acestea sînt puncte de minim pentru F și deci și pentru f; d^2F este negativ definită în $(0,0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, adică acestea sînt puncte de maxim pentru F și deci și pentru f.

3.11. Să se afle triunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază R.

Rezolvare. Se știe că aria triunghiului este dată de expresia $S = \dfrac{bc \sin A}{2}$ sau, deoarece $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ și $\sin C = \sin(A + B)$, $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin(A + B)$. Deci, trebuie găsit maximul funcției $f: [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x + y).$$

Din anularea derivatelor de ordinul întîi, se obține sistemul

$$\sin y \sin(2x + y) = 0, \quad \sin x \sin(x + 2y) = 0$$

cu soluția $x = y = \pi/3$. Apoi, calculînd derivatele de ordinul doi în acest punct, obținem $r_0 = -\sqrt{3}$, $s_0 = -\sqrt{3}/2$, $t_0 = -\sqrt{3}$. Observăm că $r_0 < 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, deci punctul $M(\pi/3, \pi/3)$ este un punct de maxim. Acest rezultat arată că triunghiul este echilateral, $A = B = C = \pi/3$, și $S_{\max} = 3R^2\sqrt{3}/4$.

3.12. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$$

are o infinitate de maxime locale și nici un minim local.

Rezolvare. Funcția f este de clasa C^∞. Punctele sale critice sînt soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(1 + e^y)\sin x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y(\cos x - 1 - y) = 0.$$

Rezultă $x_k = k\pi$, $y_k = (-1)^k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deoarece $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(1 + e^y)\cos x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y(\cos x - 2 - y)$, găsim $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_k, y_k) = -(1 + e^{y_k})(-1)^k$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_k, y_k) = -e^{y_k}$. Cu acestea se arată că $d^2 f(x_k, y_k)$ este negativ definită pentru k par și nu are semn constant pentru k impar. Deci $x_{2p} = 2p\pi$, $y_{2p} = 0$, $p \in \mathbb{Z}$, sînt puncte de maxim local și $f_{\max} = f(2p\pi, 0) = 2$.

3.13. Să se determine minimul local al funcției

$$(x, y, z) \to f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Rezolvare. Punctele probabile de extrem sînt soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 12x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2 = 0,$$

adică $M_1(0, 0, -1)$ și $M_2(24, -144, -1)$. Hessiana lui f are expresia

$$\frac{1}{2} d^2 f(x, y, z)(dx, dy, dz) = 3x\,dx^2 + dy^2 + dz^2 + 12\,dx\,dy.$$

Acesteia îi atașăm determinanții

$$\Delta_1(x, y, z) = 3x, \quad \Delta_2(x, y, z) = \begin{vmatrix} 3x & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3(x - 12), \quad \Delta_3(x, y, z) = \begin{vmatrix} 3x & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(x - 12).$$

Deoarece $\Delta_1(M_1) = 0$, $\Delta_2(M_1) = \Delta_3(M_1) = -36 < 0$, hessiana $d^2 f(M_1)$ nu păstrează semn constant, deci punctul critic M_1 nu este punct de extrem. În punctul M_2 găsim $\Delta_1(M_2) = 72 > 0$, $\Delta_2(M_2) = \Delta_3(M_2) = 36 > 0$, adică $d^2 f(M_2)$ este pozitiv definită. Deci, punctul M_2 este un punct de minim local și $f_{\min} = f(24, -144, -1) = -6913$.

3.14. Să se găsească extremele funcției definite prin

$$f(x, y, z, u) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{u} + \dfrac{u}{1} & \text{pentru } x, y, z, u > 0, \\ 0 & \text{pentru } x = y = z = u = 0, \end{cases}$$

Rezolvare. Deoarece $f(x, y, z, u) \geqslant f(0, 0, 0, 0) = 0$, punctul $(0, 0, 0, 0)$ este un punct de minim global. Restricția lui f la $x, y, z, u > 0$ este de clasă C^∞. Punctele critice ale acestei restricții sînt soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{z}{u^2} + 1 = 0,$$

$$x, y, z, u > 0.$$

Rezultă punctul critic unic $(1, 1, 1, 1)$.

Hessiana restricției lui f la $x, y, z, u > 0$ are expresia $d^2f(x, y, z, u)(dx, dy, dz, du) =$

$$= \frac{2}{x^3}\,dx^2 + \frac{2x}{y^3}\,dy^3 + \frac{2y}{z^3}\,dz^2 + \frac{2z}{u^3}\,du^2 - \frac{2}{y^2}\,dx\,dy - \frac{2}{z^2}\,dy\,dz - \frac{2}{u^2}\,dz\,du.$$

Matricea simetrică atașată lui $d^2f(1, 1, 1, 1)$ are ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică $(2-\lambda)^4 - 3(2-\lambda)^2 + 1 = 0$. Deoarece valorile proprii $\lambda_{1,2,3,4} = 2 \mp \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$ sînt strict pozitive, rezultă că $d^2f(1, 1, 1, 1)$ este pozitiv definită. De aceea $(1, 1, 1, 1)$ este un punct de minim local și $f_{\min} = f(1, 1, 1, 1) = 5$.

3.15. Să se arate că funcția definită prin

$$V(\mathbf{x}) = \left(\frac{c_1}{x_1}\right)^{x_1} \cdots \left(\frac{c_n}{x_n}\right)^{x_n}, \quad x_i > 0,$$

unde c_i sînt constante strict pozitive, admite un singur punct critic care este un punct de maxim global și să se determine acest maxim.

Rezolvare. Punctele critice ale lui V sînt aceleași cu punctele critice ale lui $\ln V$. Dar

$$\ln V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{c_i}{x_i}.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial \ln V(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \ln \frac{c_i}{x_i} - 1 = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

are soluția unică $x_1 = \frac{c_1}{e}, \ldots, x_n = \frac{c_n}{e}$. De aceea, punctul de coordonate $x_i = \frac{c_i}{e}$, $i = 1, \ldots, n$, este singurul punct critic al lui V.

Deoarece $d^2 \ln V(\mathbf{x}) = -\frac{dx_1^2}{x_1} - \ldots - \frac{dx_n^2}{x_n}$ este negativ definită, funcția $\ln V(\mathbf{x})$ este concavă. Astfel punctul critic $x_i = \frac{c_i}{e}$, $i = 1, \ldots, n$, este un punct de maxim global

pentru în $V(\mathbf{x})$. Ţinînd seama că logaritmul natural este o funcţie strict crescătoare, rezultă că $x_i = \frac{c_i}{e}$, $i = 1, \ldots, n$, este un punct de maxim global pentru V. Mai mult

$$\max_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) = V\left(\frac{c_1}{e}, \ldots, \frac{c_n}{e}\right) = e^{\frac{c_1 + \cdots + c_n}{e}}.$$

3.3.2. *Extremele locale ale unei funcţii implicite.* Fie $(x, y) \to f(x, y)$ o funcţie ce clasă C^p, $p \geqslant 2$ şi $x \to y(x)$ o funcţie de clasă C^p definită implicit de ecuaţia $f(x, y) = c$ (const). Deoarece

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y},$$

punctele critice ale funcţiei implicite $x \to y(x)$ se află printre abscisele x_i ale soluţiilor $M_i(x_i, y_i)$ ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0, \quad f(x, y) = c.$$

Derivata de ordinul doi a funcţiei implicite y are expresia

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Valoarea acestei derivate în punctul critic x_i este

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_i)}{\frac{\partial f}{\partial y}(M_i)}.$$

Dacă numărul $\frac{d^2y}{dx^2}(x_i)$ este strict pozitiv (negativ), atunci x_i este un punct de minim (maxim). În cazul $\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) = 0$, natura punctului critic (degenerat) x_i se stabileşte fie printr-un studiu direct al valorilor funcţiei, fie prin utilizarea derivatelor de ordin superior, fie prin cercetarea convexităţii etc.

Exemple. 1. Fie funcţia $x \to y(x)$ definită implicit de ecuaţia $f(x, y) \equiv y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0$ şi de condiţia $y(1) = -1 + \sqrt{8}$. Se cere să se găsească punctele critice ale funcţiei implicite y şi să se stabilească natura acestor puncte.

Rezolvare. Punctele critice ale funcţiei $x \to y(x)$ se află printre abscisele soluţiilor sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy - 4 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2 \neq 0, \quad f(x, y) = y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0.$$

Sistemul are soluţia unică $M_1\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, coerentă cu condiţia $y(1) = -1 + \sqrt{8}$ şi deci $x_1 = 1/2$ este punctul critic al lui y. Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y$, rezultă $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9} < 0$, adică $x_1 = 1/2$ este un punct de maxim local şi $y_{max} = 2$.

2. Să se discute, în funcţie de parametrul real a, extremele funcţiei $x \to y(x)$ definite implicit de ecuaţia $f(x, y) = xy^2 - yx^2 = 2a^3$ şi de condiţia $y(2a) = a(1 + \sqrt{2})$.

Rezolvare. Sistemul condiţiilor necesare

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2xy = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x^2 \neq 0, \quad f(x, y) = xy^2 - yx^2 = 2a^3,$$

are soluţia $(a, 2a)$, $a \neq 0$, coerentă cu condiţia $y(2a) = a(1 + \sqrt{2})$. De aceea $x = a$, $a \neq 0$ este punctul critic al funcţiei implicite y. Observăm că $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y$ şi deci $\frac{d^2y}{dx^2}(a) = \frac{4}{3a}$, adică $x = a$ este un punct de extrem al funcţiei y şi $y_{extr} = 2a$. Dacă $a > 0$ (< 0), atunci $x = a$ este un punct de minim (maxim).

Fie $(x, y, z) \to f(x, y, z)$ o funcţie de clasă C^p, $p \geqslant 2$, şi $(x, y) \to z(x, y)$ o funcţie de clasă C^p definită implicit de ecuaţia $f(x, y, z) = c$ (const). Derivatele de ordinul întîi ale funcţiei implicite z au expresiile

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}.$$

Din acestea rezultă condiţiile necesare de extrem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0, \quad f(x, y, z) = c$$

Dacă $M_i(x_i, y_i, z_i)$ este o soluţie a acestui sistem, atunci (x_i, y_i) este un eventual punct critic al funcţiei implicite z. Valorile în punctele critice (x_i, y_i) ale derivatelor de ordinul al doilea ale funcţiei implicite z sînt

$$r_i = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_i, y_i) = -\frac{\partial^2 f/\partial x^2}{\partial f/\partial z}(M_i), \quad s_i = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_i, y_i) = -\frac{\partial^2 f/\partial x \partial y}{\partial f/\partial z}(M_i),$$

$$t_i = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_i, y_i) = -\frac{\partial^2 f/\partial y^2}{\partial f/\partial z}(M_i).$$

Dacă $r_i t_i - s_i^2 > 0$, atunci punctul critic (x_i, y_i) este un punct de extrem; pentru $r_i > 0$, funcţia are un punct de minim, iar pentru $r_i < 0$ un punct de maxim. Evident $z_{extr} = z_i$.

Exemplu. Să se găsească punctele de extrem ale funcției $(x, y) \to z(x, y)$ definite de ecuația $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 12 = 0$ și de condiția $z(1, 0) = 2 + \sqrt{15}$.

Rezolvare. Pornim de la sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 4 \neq 0, \quad f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 12 = 0,$$

care are soluțiile $M_1(0, 0, 6)$ și $M_2(0, 0, -2)$. Dintre acestea numai $M_1(0, 0, 6)$ este în concordanță cu ipoteza $z(0, 1) = 2 + \sqrt{15}$. Astfel punctul critic al funcției implicite z este $(0, 0)$. Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$, rezultă $r_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = -\frac{1}{4} < 0$, $s_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$, $t_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) = -\frac{1}{2}$, $r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{1}{8} > 0$ și deci $(0, 0)$ este un punct de maxim, iar $z_{\max} = 6$.

3.4. Puncte critice și funcții Morse

Fie V o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ și $f : V \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1.

Teoremă. *Dacă $\nabla f(\mathrm{x}) \neq 0$, atunci într-o vecinătate $U \subset V$ a lui x există un sistem de coordonate astel încît expresia lui $f|U$ să fie liniară.*

Demonstrație. Fără a scădea generalitatea, presupunem că $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}) \neq 0$. Definim $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ prin

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (f(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n).$$

Matricea jacobian a acestei funcții este

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

și are determinantul $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}) \neq 0$. Conform teoremei funcției inverse există o vecinătate U a lui x în care de la coordonatele $(x_1, \ldots, x_n)$ putem trece la coordonatele $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (f(x_1, \ldots, x_n), x_2 \ldots, x_n)$. Se

observă însă că în aceste coordonate f ia forma $(y_1, \ldots, y_n) \to y_1$, care este liniară.

Punctele critice ale unei funcţii f de clasă C^1 sînt puncte în care hiperplanul tangent la graficul lui f este un hiperplan orizontal. Tipurile posibile de puncte critice se pun în evidenţă fie utilizînd forma graficului lui f într-o vecinătate a unui asemenea punct, fie forma hipersuprafeţelor de nivel ale lui f. De exemplu, în cazul $n = 2$, originea este punct critic pentru fiecare dintre funcţiile de clasă C^∞ definite respectiv prin

$$f(x, y) = -x^2 - y^2,\ x^2 + y^2,\ x^2 - y^2,\ x^3 - 3xy^2,\ x^2,\ x^2y^2.$$

Graficele acestor funcţii au respectiv alura din fig. 3.6 — 3.11, a, iar curbele de nivel sînt schiţate în fig. 3.6—3.11 b. Denumirile uzuale pentru aceste cazuri sînt respectiv *punct de maxim* (fig. 3.6), *punct de minim* (fig. 3.7), *punct şa* (3.8), *punct şa maimuţă* (fig. 3.9), *punct albie* (fig. 3.10) şi *punct încrucişare de albii* (fig. 3.11). Remarcăm că punctele critice ale funcţiilor $-x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, $x^3 - 3xy^2$ sînt respectiv puncte critice izolate în timp ce punctele critice ale funcţiilor x^2, x^2y^2 sînt respectiv neizolate.

Fie $f : V \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 şi $\mathrm{x}_0 \in V$ un punct critic al lui f. Dacă forma pătratică (hessiana) $\mathrm{d}^2f(\mathrm{x}_0)$ este nedegenerată, adică

$$\det \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathrm{x}_0) \right] \neq 0.$$

atunci x_0 se numeşte *punct critic nedegenerat*. În caz contrar x_0 se numeşte *punct critic degenerat*. De exemplu, originea este un punct critic nedegenerat în cazurile din fig. 3.6, 3.7, 3.8 şi un punct critic degenerat în cazurile din fig. 3.9, 3.10, 3.11. Ulterior se va demonstra că punctele critice nedegenerate sînt izolate, reciproca nefiind adevărată, aşa după cum arată cazul punctului şa maimuţă care deşi este degenerat este totuşi izolat.

Să arătăm că difeomorfismele de clasă C^2 păstrează calitatea de punct critic degenerat sau nedegenerat. Pentru aceasta notăm cu U şi V două mulţimi deschise din $\mathbb{R}^n$ şi reamintim că aplicaţia $\varphi : U \to V$ este un difeomorfism (global) de clasă C^2 dacă este bijectivă şi funcţiile φ, φ^{-1} sînt de clasă C^2.

O funcţie $\varphi : U \to V$ de clasă C^2 se numeşte *difeomorfism local* dacă pentru orice punct $\mathrm{x} \in U$ există o vecinătate $U_1 \subset U$ a lui x astfel încît $\varphi|_{U_1}$ să fie un difeomorfism global; φ are această proprietate dacă şi numai dacă matricea sa jacobian este nesingulară pe U (dacă matricea jacobian este nesingulară şi dacă φ este o bijecţie, atunci φ este un difeomorfism global).

Teoremă. *Fie $f : V \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2, fie $\mathrm{x}_0 \in V$ un punct critic al lui f, iar $\varphi : U \to V$ un difeomorfism de clasă C^2. Punctul x_0 este*

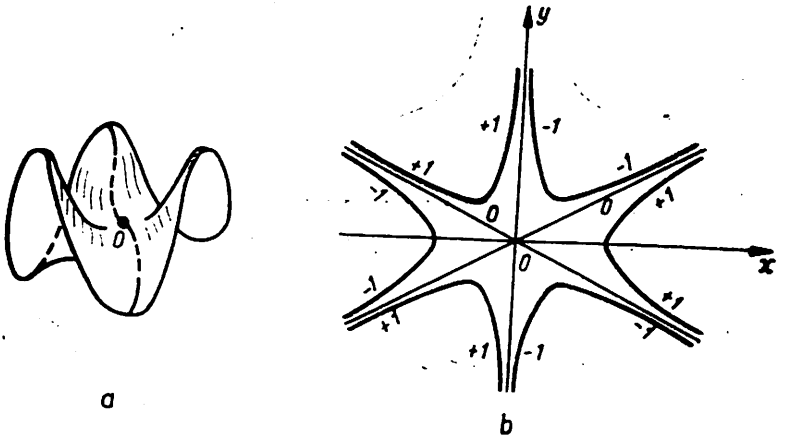


Fig. 3.9

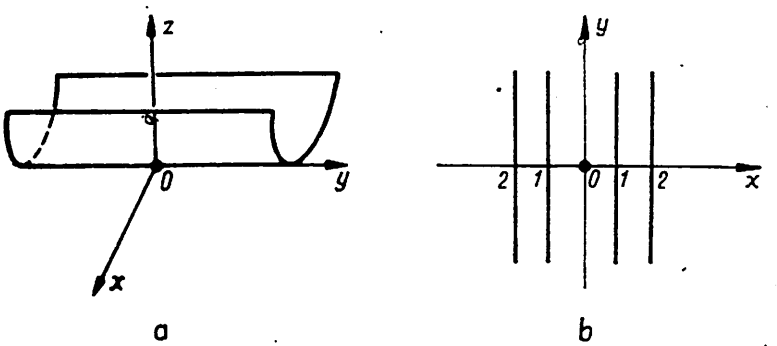


Fig. 3.10

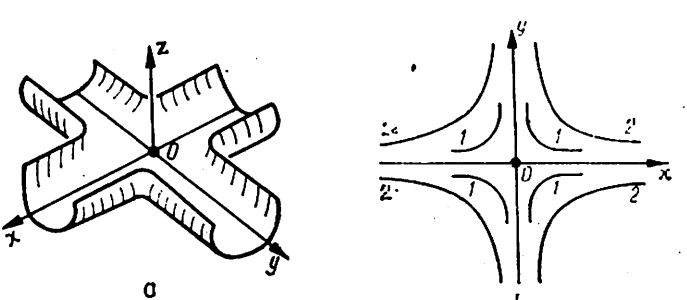


Fig. 3.11

un punct critic nedegenerat (degenerat) pentru f dacă şi numai dacă punctul $\varphi^{-1}(\mathbf{x}_0)$ *este un punct critic nedegenerat (degenerat) pentru funcţia* $\mathbf{g}=\mathbf{f}\circ\varphi : U \to \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Deoarece $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$, sau explicit

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi_n(y_1, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

este un difeomorfism local, matricea jacobian $\left[\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_i}\right]$ este nesingulară. Regulile de derivare a funcţiilor compuse conduc la

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi_l}(\varphi)\,\frac{\partial \varphi_l}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_i\,\partial y_j} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_l\,\partial \varphi_k}(\varphi)\,\frac{\partial \varphi_l}{\partial y_i}\,\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi_l}(\varphi)\,\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial y_i\,\partial y_j}.$$

Ţinînd seama că $\det\left[\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial y_i}\right] \neq 0$, se observă că $\mathbf{x}_0$ este un punct critic pentru f dacă şi numai dacă $\mathbf{y}_0 = \varphi^{-1}(\mathbf{x}_0)$ este un punct critic pentru g. În plus, dacă $\mathbf{x}_0$ este un punct critic pentru f şi dacă notăm $\mathbf{G} = \left[\dfrac{\partial^2 g}{\partial y_i\,\partial y_j}(\mathbf{y}_0)\right]$, $\mathbf{F} = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi_l\,\partial \varphi_k}(\mathbf{x}_0)\right]$, $\mathbf{J} = \left[\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial y_i}(\mathbf{y}_0)\right]$, atunci $\mathbf{G} = {}^t\mathbf{J}\,\mathbf{F}\,\mathbf{J}$ şi deci matricele $\mathbf{G}$ şi $\mathbf{F}$ au acelaşi rang.

Să dăm teorema lui Morse prin care se stabileşte că restricţia lui f la o vecinătate a unui punct critic nedegenerat poate fi adusă la o formă canonică simplă printr-o schimbare de coordonate. Drept consecinţă apare faptul că punctele critice nedegenerate sînt puncte critice izolate.

Lemă. *Fie V o vecinătate convexă a originii lui $\mathbb{R}^n$. Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2 pentru care $f(\mathbf{0}) = 0$, atunci există funcţiile $g_i : V \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astel încît* $f = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i$ *şi* $g_i(\mathbf{0}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0})$.

Teorema lui Morse. *Fie $f : V \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 şi $\mathbf{x}_0 \in V$ un punct critic nedegenerat. Atunci pe o vecinătate $U \subset V$ a lui $\mathbf{x}_0$ există un sistem de coordonate $(y_1, \ldots, y_n)$ cu $y_i(\mathbf{x}_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, astel încît pe U are loc identitatea*

$$f = f(\mathbf{x}_0) - y_1^2 - \ldots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \ldots + y_n^2.$$

Teorema lui Morse arată că după o alegere potrivită a coordonatelor într-o vecinătate a unui punct critic nedegenerat creşterea funcţiei se reduce la o formă pătratică

$$z_1^2 + \dots + z_{n-l}^2 - z_{n-l+1}^2 - \dots - z_n^2,$$

numită uneori *l-şa Morse*. Evident $(0,\dots,0)$ este un punct critic nedegenerat, izolat, pentru o l-şa şi dacă $l=0$, avem un punct de minim, dacă $l=n$, avem un punct de maxim. Numărul l este un invariant ataşat tipului de punct critic deoarece schimbările de coordonate îl lasă neschimat.

Raţionamentul precedent arată că un punct critic nedegenerat poate fi transformat printr-un difeomorfism într-un punct l-şa. Deoarece un punct l-şa este un punct critic izolat, iar difeomorfismele (schimbările de coordonate) duc puncte critice izolate în puncte critice izolate, rezultă că un punct critic nedegenerat este întotdeauna izolat.

Două funcţii $f, g : V \to \mathbb{R}$ (de clasă C^2) se numesc *echivalente* într-o vecinătate U a lui $\mathbf{x}_0 \in V$ dacă există un difeomorfism local $\mathbf{x} \to y(\mathbf{x})$ astfel încît $f(\mathbf{x}) = g(y(\mathbf{x})) + r$, $\forall \mathbf{x} \in U$. Teorema lui Morse arată că într-o vecinătate a unui punct critic nedegenerat funcţia f este echivalentă cu o formă pătratică nedegenerată.

Fie $f,p : V \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^2, iar $\mathbf{x}_0 \in V$ un punct critic al lui f. Funcţia f se numeşte *structural stabilă* într-o vecinătate a punctului critic $\mathbf{x}_0$ dacă pentru orice funcţie p suficient de mică [25] funcţiile f şi $f + p$ sînt echivalente, după o translaţie potrivită a originii; altfel spus punctele critice ale lui f şi $f + p$ au acelaşi tip. Rezultă că orice funcţie este structural stabilă într-o vecinătate a unui punct critic nedegenerat.

Fie $f : V \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2. Dacă d^2f este nedegenerată în punctele critice ale lui f, atunci f se numeşte *funcţie Morse*. Funcţiile Morse au o structură relativ stabilă, fapt exploatat din plin în teoria catastrofelor [25]. Iată în ce constă această stabilitate.

— Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ este o funcţie Morse, iar $\varphi : U \to V$ este un difeomorfism, atunci $g = f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ este o funcţie Morse.

— Local, funcţiile Morse pot fi exprimate fie ca forme liniare (în vecinătatea punctelor x pentru care $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$), fie ca forme pătratice (în vecinătatea punctelor critice nesingulare).

— Funcţiile Morse sînt structural stabile, adică o perturbare suficient de mică a funcţiei poate fi întotdeauna exprimată (local) în aceeaşi formă ca şi funcţia iniţială printr-o schimbare de coordonate, urmată eventual de o schimbare a scării valorilor. De exemplu, funcţia $(x, y) \to x^2 + y^2$ este o funcţie Morse. Adunînd la aceasta funcţia $(x, y) \to x$ găsim $(x, y) \to \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}$, care poate fi exprimată prin $(u, v) \to u^2 + v^2$ dacă punem $u = x + 1/2$, $v = y$ şi dacă mutăm originea dreptei reale în $-1/4$.

— Orice funcţie de clasă C^2 care nu are proprietatea lui Morse poate fi schimbată într-o funcţie Morse prin perturbări oricît de mici.

3.16. Să se arate că dacă f este o funcţie Morse strict pozitivă, atunci funcţiile f^2 şi $\sqrt{f}$ sînt funcţii Morse.

Rezolvare. Deoarece $d(f^2) = 2f\,df$, $d^2(f^2) = 2(df)^2 + 2f\,d^2f$, se observă că în punctele critice ale lui f formele pătratice $d^2(f^2)$ şi d^2f au acelaşi rang.

Pentru $\sqrt{f}$ se procedează analog.

3.17. Să se arate că $(x, y) \to f(x, y) = (\cos y + \sin y)\, e^{x - e^{2x}}$ este o funcţie Morse.

Rezolvare. Evident $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este de clasă C^∞. Punem $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$, $g(u, v) = (u+v)\, e^{-(u^2+v^2)}$. Funcţia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie Morse deoarece punctele sale critice $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}$ şi $u = -\frac{1}{2}$, $v = -\frac{1}{2}$ sînt respectiv nedegenerate (punct de maxim şi punct de minim). Deoarece $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = e^{2x} \neq 0$, funcţia $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este un difeomorfism local. De aceea $f = g(u, v)$ este o funcţie Morse.

3.18. Funcţia $(x, y) \to f(x, y)$ de clasă C^2 are o valoare critică în punctul (a, b). Să se discute natura valorii critice a restricţiei lui f la o dreaptă arbitrară care trece prin (a, b).

Rezolvare. Fie $y - b = m(x - a)$ ecuaţia unei drepte oblice care trece prin (a, b). Această ecuaţie defineşte funcţia implicită $x \to y_m(x) = b + m(x - a)$ astfel încît restricţia lui f se reduce la funcţia $x \to \varphi_m(x) = f(x, y_m(x))$. Pentru $x = a$, $y = b$ avem $\frac{d\varphi_m}{dx}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + m\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, $\frac{d^2\varphi_m}{dx^2}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2m\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + m^2\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(a, b)$ (trinom în variabila reală m). Notăm $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$.

Dacă $\Delta(a, b) > 0$, atunci (a, b) este un punct de extrem pentru f, iar $\frac{d^2\varphi_m}{dx^2}(a) \neq 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$. De aceea $x = a$ este un punct de extrem local pentru φ_m.

Fie $\Delta(a, b) < 0$. Atunci (a, b) nu este un punct de extrem pentru f, iar $\frac{d^2\varphi_m}{dx^2}(a)$ nu păstrează semn constant. Pentru $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \neq 0$ există două valori m_1 şi m_2 astfel încît $\frac{d^2\varphi_{m_i}}{dx^2}(a) = 0$, $i = 1, 2$, şi deci φ_{m_1} şi φ_{m_2} admit pe $x = a$ drept punct critic degenerat; pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{m_1, m_2\}$ funcţia φ_m admite pe $x = a$ drept punct de extrem. Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = 0$, atunci există o singură valoare m_0 astfel încît $\frac{d^2\varphi_{m_0}}{dx^2}(a) = 0$; corespunzător $x = a$ este un punct critic degenerat pentru φ_{m_0} şi un punct de extrem pentru funcţiile φ_m, $m \neq m_0$.

Dacă $\Delta(a, b) = 0$, atunci (a, b) este un punct critic degenerat pentru f, iar $\frac{d^2\varphi_m}{dx^2}(a)$ se reduce la un pătrat perfect în m. Pentru $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = 0$ avem $\frac{d^2\varphi_m}{dx^2} = 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$, adică $x = a$ este un punct critic degenerat al lui φ_m. În ipoteza $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \neq 0$ există o direcţie dublă m_0 astfel încît $x = a$ să fie un punct critic degenerat al lui φ_{m_0}; pentru $m \neq m_0$ funcţia φ_m admite pe $x = a$ drept punct de extrem.

Pe direcția verticală $x = a$ obținem funcția parțială $y \to \psi(y) = f(a, y)$ astfel încît $\frac{d\psi}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y}$ și $\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; așadar, cînd $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ este strict negativă (strict pozitivă), funcția ψ are în $x = a$ o valoare maximă (minimă); dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = 0$, atunci $x = a$ este un punct critic degenerat pentru funcția ψ.

3.5. Metode numerice pentru determinarea extremelor funcțiilor de n variabile

Metoda rețelei se poate aplica și la funcții de mai multe variabile în vederea selectării unor valori maxime sau minime dintre valorile funcției calculate pentru o partiție a unui interval n-dimensional. Și aici aceste valori sînt o primă aproximație a extremelor globale.

Exemplu. Fie funcția $f: \left[\frac{175}{10}, \frac{195}{10}\right] \times \left[\frac{2}{100}, \frac{11}{100}\right] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \left[\frac{x + 20 + y}{200\,x\,(400\,x + y + 20)} \cdot \frac{2000\,y^2}{y + 20\,xy - 400\,xy^2 - 20\,x^2 + 398\,x + 20}\right]^{1/2}.$$

Pentru calcularea valorilor funcției pe intervalul bidimensional indicat se utilizează programul

```
      DIMENSION F(6, 10)
      X = 17.
      DO 1 II = 1,6
      X = X + 0.5
      Y = 0.01
      DO 2 JJ = 1,10
      Y = Y + 0.01
      F(II, JJ) = SQRT((X + 20 + Y)/(200*X*(400*X + Y + 20)) + (2000*Y**2)
     */(Y + 20*X*Y - 400*X*Y**2 - 20*X**2 + 398*X + 20))
      WRITE (3,200) X, Y, F(II. JJ)
  200 FORMAT (' ', F5.2, 2X, F5.2, 2X, E12.6)
    2 CONTINUE
    1 CONTINUE
      STOP
      END
```

Se obțin 60 de valori pentru funcție, care sugerează că drept valoare maximă poate fi acceptată $f_{max} \approx 0{,}440656$ realizată pentru $x = 19{,}50$ și $y = 0{,}11$, iar drept valoare minimă $f_{min} \approx 0{,}028171$ realizată pentru $x = 17$ și $y = 0{,}02$.

O altă metodă numerică folosită în scopul determinării unui minim local este *metoda gradientului* sau *metoda celei mai rapide descreșteri*.

Fie $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$ o funcție diferențabilă. Observația că $-\nabla f(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$ este un cîmp vectorial perpendicular pe hipersuprafețele de nivel, care indică în fiecare punct $\mathbf{x}$ direcția și sensul celei mai

rapide descreşteri, a sugerat pentru găsirea unui minim metoda care este ilustrată de organigrama din fig. 3.12.

Dacă $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ este un şir convergent către $\mathbf{x}_0$ iar $\mathbf{x}_0$ este un punct de minim local, atunci şirul $f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{x}_2) > \ldots > f(\mathbf{x}_i) > \ldots$ converge către minimul $f(\mathbf{x}_0)$, iar şirul cu termenul general $\nabla f(\mathbf{x}_i)$ converge către zero. Bineînţeles, din punct de vedere numeric este suficient să aproximăm pe $f(\mathbf{x}_0)$ prin $f(\mathbf{x}_i)$, unde $\mathbf{x}_i$ este fixat prin unul dintre următoarele criterii posibile de oprire:

$$\| \nabla f(\mathbf{x}_i) \|^2 < \varepsilon \quad \text{sau}$$

$$| f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_{i-1}) | < \eta.$$

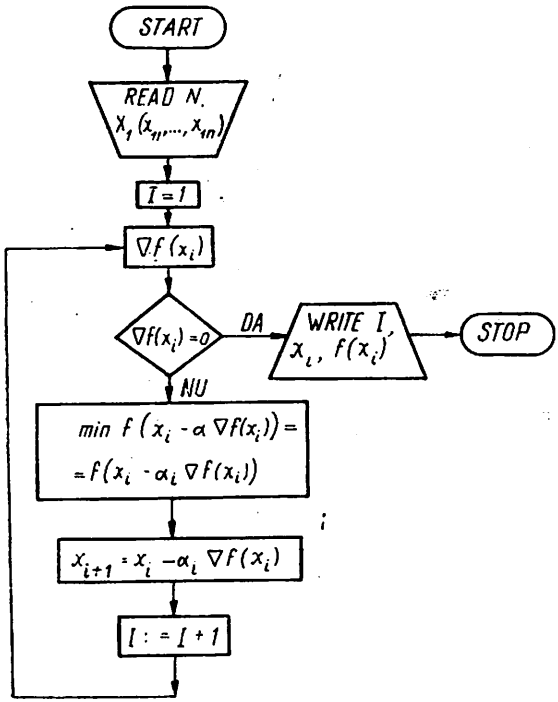


Fig. 3.12

Rezultatul obţinut se verifică prin repetarea procedeului pentru diferite puncte iniţiale.

Exemplu. Utilizînd metoda gradientului să se determine minimul lui $f = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$.

Rezolvare. Observăm că $f = (x-1)^2 + (y+2)^2$. De aceea punctul de minim pe care îl căutăm este $x = 1$, $y = -2$, iar $\min f = f(1, -2) = 0$.

Alegem punctul iniţial $x_1 = 2$, $y_1 = 4$. Ţinînd seama că $\operatorname{grad} f(x, y) = 2(x-1)\,\mathbf{i} + 2(y+2)\,\mathbf{j}$, rezultă $\operatorname{grad} f(2, 4) = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Punem

$$x_2 = x_1 - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) = 2(1 - \alpha_1), \quad y_2 = y_1 - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) = 4(1 - 3\alpha_1).$$

Considerăm funcţia $\alpha_1 \to \varphi(\alpha_1) = f(x_2, y_2) = 37(1 - 2\alpha_1)^2$. Se vede că $\alpha_1 = 1/2$ este un punct de minim al lui φ. Rezultă $x_2 = 1$, $y_2 = -2$. Deoarece $\operatorname{grad} f(1, -2) = \mathbf{0}$, punctul găsit este un punct critic al lui f. Pe de altă parte $d^2 f(1, -2) = 2(dx^2 + dy^2)$ este pozitiv definită şi deci $(1, -2)$ este un punct de minim (global).

3.19. Pentru găsirea unei aproximări mai bune a minimului unei funcţii $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se utilizează un program [15] bazat pe metoda relaxării care presupune variaţia succesivă a coordonatelor punctului $\mathbf{x}$. Deşi această metodă necesită o durată mai mare, este de preferat uneori metodei evaluării gradientului la fiecare pas. Alegerea corectă a datelor iniţiale determină rapiditatea de găsire a minimului, deci este bine de aplicat acest program cînd se localizează aproximativ punctul de minim care se caută.

De obicei, la funcţii de mai multe variabile funcţia de minimizat şi condiţiile iniţiale corespund unor fenomene fizice sau naturale bine cunoscute, aşa după cum a fost aleasă şi funcţia studiată

$$f(x, y)=\left[\frac{x+20+y}{200\times(400\,x+y+20)}+\frac{2\,000\,y^2}{y+20\,xy-400\,xy^2-20\,x^2+398\,x+20}\right]^{1/2}$$

cu condiţiile :

$$X_{\min}=15\,;\quad Y_{\min}=0{,}01\,;\quad \Delta X=1/2\,;$$

$$X_{\max}=22\,;\quad Y_{\max}=0{,}16\,;\quad \Delta Y=0{,}1\,;\quad \varepsilon=10^{-6}$$

În programul folosit valorile funcţiei sînt furnizate de funcţia externă

```
FUNCTION F (X, Y)
REAL X, Y
F= SQRT((X + 20 + Y)/(200*X*(400*X + Y + 20)) + (2000*Y**2
*/(Y + 20*X*Y - 400*X*Y**2 - 20*X**2 + 398*X + 20))
RETURN
END
```

iar rezultatul obţinut este : minimul funcţiei F are valoarea $\approx$ 0,07028 şi s-a obţinut la următoarele valori ale coordonatelor (17,3024 ; 0,0476).

3.6. Metoda celor mai mici pătrate pentru aproximarea unei funcţii

Să presupunem că avem o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pentru care cunoaştem numai valorile într-un număr finit de puncte :

x	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
$f(x)$	b_1	b_2	$\ldots$	b_n

Considerăm familia de funcţii reale $x \to \Phi\,(x\,;\,\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $x \in [a, b]$, care depinde de $p < n$ parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Dacă aproximăm pe f prin Φ, atunci în punctele a_i există erorile

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = b_i - \Phi(a_i\,;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p).$$

În anumite ipoteze asupra lui Φ se pot determina parametrii λ_j astfel încît eroarea pătratică $E = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ să fie minimă.

Cazul cel mai des utilizat în aplicaţii se referă la situaţia în care Φ este o combinaţie liniară de funcţiile $\varphi_1, \ldots \varphi_p$, adică $\Phi(x\,;\,\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_p\varphi_p(x)$. În acest caz valorile parametrilor λ_j care minimizează eroarea pătratică

$$E = \sum_{i=1}^{n} (b_i - \lambda_1\varphi_1(a_i) - \ldots - \lambda_p\varphi_p(a_i))^2$$

se determină relativ uşor. Într-adevăr, punctele critice ale lui E sînt date de sistemul liniar

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \lambda_j} = -\sum_{i=1}^{n} (b_i - \lambda_1\varphi_1(a_i) - \ldots - \lambda_p\varphi_p(a_i))\,\varphi_j(a_i) =$$

$$= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(a_i)\,\varphi_j(a_i) + \ldots + \lambda_p \sum_{i=1}^{n} \varphi_p(a_i)\,\varphi_j(a_i) - \sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_j(a_i) = 0,$$

unde $j = 1, 2, \ldots, p$. Presupunem că acest sistem admite cel puţin o soluţie. Pe de altă parte, $\frac{1}{2}\,d^2E = \sum_{j,k} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial\lambda_j\,\partial\lambda_k}\,d\lambda_j\,d\lambda_k = \sum_{j,k}\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_j(a_i)\,\varphi_k(a_i)\right) d\lambda_j\,d\lambda_k =$ $= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(a_i)\,d\lambda_j\right)^2$ este pozitiv semidefinită. Astfel eroarea pătratică este o funcţie convexă şi deci minimul său este unic. Orice punct critic al lui E realizează acest minim.

Exemplu. Fie $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \pi/4 & \pi/2 \\ \hline f(x) & 1 & -1 & 1 \end{array}$. Să se aproximeze această funcţie printr-o combinaţie liniară de $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$, determinată prin criteriul celor mai mici pătrate.

Rezolvare. Avem $\Phi(x;\ \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x$, $\varepsilon_1 = 1 - (\lambda_1 \sin 0 + \lambda_2 \cos 0)$, $\varepsilon_2 = -1 - \left(\lambda_1 \sin\frac{\pi}{4} + \lambda_2 \cos\frac{\pi}{4}\right)$, $\varepsilon_3 = 1 - \left(\lambda_1 \sin\frac{\pi}{2} + \lambda_2 \cos\frac{\pi}{2}\right)$ şi deci $E = (1 - \lambda_2)^2 + \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\right]^2 + (1 - \lambda_1)^2$. Rezolvînd sistemul

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda_1} = 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2 + \sqrt{2} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \lambda_2} = \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2 + \sqrt{2} = 0,$$

găsim $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$. Rezultă $\Phi(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)(\sin x + \cos x)$. Aceasta aproximează pe $f(x)$ cu eroarea pătratică $E = (1 + \sqrt{2})^2/2$.

Să presupunem că $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă. Considerăm familia de funcţii reale continue $x \to \Phi(x;\ \lambda_1, \ldots \lambda_p)$ $x \in [a, b]$. Dacă aproximăm pe f prin Φ, atunci rezultă eroarea $\varepsilon = \varepsilon(x;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = f(x) - \Phi(x;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ şi eroarea pătratică $E = \int_a^b \varepsilon^2\,dx$. În anumite condiţii, se pot determina parametrii λ_j astfel încît E să fie minimă.

În aplicaţii se utilizează frecvent cazul combinaţiei liniare $\Phi(x;\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_p\varphi_p(x)$, care se rezolvă în felul următor. Se scrie

$$E = \int_a^b (f(x) - \lambda_1\varphi_1(x) - \ldots - \lambda_p\varphi_p(x))^2\,dx$$

şi apoi se caută un punct de minim şi minimul lui E. Punctele critice ale lui E sînt date de sistemul liniar

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \lambda_j} = \lambda_1 \int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_j(x)\,dx + \ldots + \lambda_p \int_a^b \varphi_p(x)\,\varphi_j(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0,$$

$$j = 1, \ldots, p.$$

Presupunem că acest sistem admite cel puţin o soluţie. Deoarece

$$\frac{1}{2}\,d^2E = \sum_{j,k} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \lambda_j\,\partial \lambda_k}\,d\lambda_j\,d\lambda_k = \sum_{j,k}\left(\int_a^b \varphi_j(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right) d\lambda_j\,d\lambda_k =$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_j \varphi_j(x)\,d\lambda_j\Big)^2\,dx \geqslant 0,$$

funcţia E este convexă. Rezultă că minimul lui E este unic şi că orice punct critic al lui E este un punct de minim.

Exemplu. Fie $y = \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$. Să se aproximeze această funcţie printr-o combinaţie liniară de $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, determinată prin criteriul celor mai mici pătrate.

Rezolvare. Avem $\Phi(x;\ \lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2 x$ şi $E = \int_0^{\pi/2} (\sin x - \lambda_1 - \lambda_2 x)^2\,dx$. Punctele critice ale lui E sînt date de sistemul

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \lambda_1} = \lambda_1 \int_0^{\pi/2} dx + \lambda_2 \int_0^{\pi/2} x\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \lambda_2} = \lambda_1 \int_0^{\pi/2} x\,dx + \lambda_2 \int_0^{\pi/2} x^2\,dx - \int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx = 0$$

sau

$$\lambda_1 \frac{\pi}{2} + \lambda_2 \frac{\pi^2}{8} = 0, \qquad \lambda_1 \frac{\pi^2}{8} + \lambda_2 \frac{\pi^3}{24} = 1.$$

Găsim

$$\lambda_1 = \frac{8}{\pi} - \frac{24}{\pi^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{96}{\pi^3} - \frac{24}{\pi^2} \quad \text{şi} \quad \Phi(x) = \frac{8}{\pi} - \frac{24}{\pi^2} + \left(\frac{96}{\pi^3} - \frac{24}{\pi^2}\right) x.$$

3.7 Extreme cu legături

Fie U o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ și funcțiile $f: U \to \mathbb{R}$, $\varphi_k: U \to \mathbb{R}$, $k = 1,\ldots,q$; $\psi_l: U \to \mathbb{R}$, $l = 1,\ldots,r$. Considerăm mulțimea

$$S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in U,\ \varphi_k(\mathbf{x}) = 0,\ \psi_l(\mathbf{x}) \geqslant 0\}.$$

În ipoteza că f, φ_k și ψ_l sînt de clasa C^p, unde $p \geqslant 1$, vom da unele condiții necesare sau suficiente pentru ca un punct $\mathbf{x}_0 \in S$ să fie un punct de extrem pentru f. Dacă $\mathbf{x}$ este un punct din S, atunci orice vector $\mathbf{v}$ legat în $\mathbf{x}$ cu proprietatea că o deplasare mică după direcția și sensul lui nu modifică restricțiile, adică cu proprietatea că $\exists t_0 > 0$, $\forall t \in [0, t_0] \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{x} + t\mathbf{v} \in S$, se numește *vector admisibil în punctul* $\mathbf{x}$.

Exemple. 1. Să se minimizeze $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$ cu restricțiile

$$\psi_1(x, y) = y - x^2 \geqslant 0,\ \psi_2(x, y) = -x - y + 2 \geqslant 0,\ x, y \geqslant 0.$$

Rezolvare. Desenînd dreptele $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ și parabola $y = x^2$, obținem un triunghi curbiliniu (fig. 3.13). Punctele din interiorul și de pe laturile acestui triunghi satisfac restricțiile problemei. Funcția f reprezintă pătratul distanței dintre $C(2, 1)$ și $M(x, y)$. De aceea f este minim cînd distanța $d(C, M)$ este minimă. Se observă că acest minim este atins în punctul $M_0(1,1)$ date de sistemul $y = x^2$, $x + y = 2$ (ambele restricții sînt active). Pentru (1,1) mulțimea tuturor vectorilor admisibili este cuprinsă între $x + y = 2$ și $y = 2x - 1$ (tangenta la parabola în M_0). Pe de altă parte vectorul $-\nabla f(M_0)$ indică sensul celei mai rapide descreșteri. De aceea în punctul de minim M_0, nici un vector admisibil nu poate forma cu $-\nabla f(M_0)$ un unghi mai mic de 90° (dacă am avea un asemenea vector, ar trebui ca f să descrească, adică (1,1) n-ar fi punct de minim). Cu alte cuvinte $-\nabla f$ trebuie să fie conținut în conul generat de $-\nabla\psi_1(M_0)$ și $-\nabla\psi_2(M_0)$, adică $\exists\, v_1, v_2 \geqslant 0$ așa că $\nabla f(M_0) = v_1\nabla\psi_1(M_0) + v_2\nabla\psi_2(M_0)$.

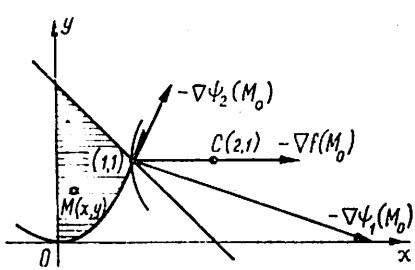


Fig. 3.13

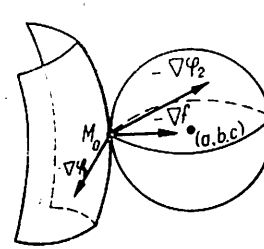


Fig. 3.14

2. Să se determine minimul funcției $f = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ cu restricțiile $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = 0$.

Argumente analoge cu cele din exemplul precedent arată că într-un punct de minim, M_0 (fig. 3.14) vectorul $\nabla f(M_0)$ trebuie să se afle în planul determinat de $\nabla\varphi_1(M_0)$, $\nabla\varphi_2(M_0)$, adică

$$\nabla f(M_0) = u_1\nabla\varphi_1(M_0) + u_2\nabla\varphi_2(M_0).$$

Teoremă. *Dacă f, φ_k şi ψ_l sînt de clasa C^1, restricţiile sînt regulate într-un punct $x_0 \in S$ şi x_0 este un punct de minim local pentru f, atunci există numerele u_k, $k = 1,\ldots,q$; v_l, $l = 1,\ldots,r$ astfel încît*

$$1)\ v_l \geqslant 0, \quad l = 1,\ldots,r; \quad v_l = 0 \text{ pentru } l \notin \mathcal{L}(x_0),$$

$$2)\ \nabla f(x_0) = \sum_{k=1}^{q} u_k \nabla \varphi_k(x_0) + \sum_{l=1}^{r} v_l \nabla \psi_l(x_0).$$

Demonstraţie [20]. Presupunem că x_0 este un punct de minim pe S pentru f, adică $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall x \in S$. Fără a scădea generalitatea putem lua $x_0 = (0, 0,\ldots,0)$, $f(x_0) = 0$ şi

$$\psi_1(x_0) = \ldots = \psi_p(x_0) = 0, \quad \psi_{p+1}(x_0) > 0, \ldots, \psi_r(x_0) > 0.$$

Alegem un număr pozitiv ε_1 aşa că $\bar{B}(0, \varepsilon_1) \subset U$ şi $\psi_{p+1}(x),\ldots, \psi_r(x)$ să fie pozitive pe $\bar{B}(0, \varepsilon_1)$. Mai întîi vom arăta că pentru fiecare $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ corespunde un N aşa încît

$$f(x) + \| x \|^2 + N\left\{\sum_{k=1}^{q} \varphi_k^2(x) + \sum_{l=1}^{p} [\psi_l^*(x)]^2\right\} > 0, \ \forall x \text{ cu } \|x\| = \varepsilon, \quad (3.3)$$

unde $\psi^*(x) = \max(-\psi(x), 0)$. Raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că afirmaţia (3.3) este falsă. Atunci există numerele N_1, $N_2,\ldots$ tinzînd la ∞ şi punctele x_1, $x_2,\ldots$ cu $\|x_m\| = \varepsilon$ astfel încît

$$f(x_m) + \| x_m \|^2 \leqslant -N_m\left\{\sum_{k=1}^{q} \varphi_k^2(x_m) + \sum_{l=1}^{p} [\psi_l^*(x_m)]^2\right\}. \quad (3.4)$$

Şirul $\{x_m\}$ posedă un subşir convergent către $\bar{x}$ deoarece sfera $\|x_m\| = \varepsilon$ este o mulţime compactă; fără a scădea generalitatea putem presupune că acesta poate fi chiar şirul iniţial. Atunci $\|\bar{x}\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m\| = \varepsilon$ şi $f(x_m) \to f(\bar{x})$. Împărţind ambii membri ai lui (3.4) prin $-N_m$ şi trecînd la limită, găsim

$$\sum_{k=1}^{q} \varphi_k^2(x) + \sum_{l=1}^{p} [\psi_l^*(x)]^2 = 0.$$

Astfel $\bar{x} \in S$, adică satisface $\psi_k(\bar{x}) = 0$, $\psi_l(\bar{x}) \geqslant 0$, şi deci $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(\bar{x}) \geqslant f(x_0) = 0$; dar din (3.4) avem $f(x_m) \leqslant -\varepsilon^2$, ceea ce este contradictoriu, deci relaţia (3.3) este adevărată.

Să demonstrăm că la fiecare $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ corespunde un punct $\bar{\bar{x}}$ şi un vector unitar $(\lambda_0, \lambda_1,\ldots, \lambda_q, \mu_1,\ldots, \mu_p)$ cu $\lambda_0 > 0$ şi $\mu_1,\ldots, \mu_p$ nepozitive, aşa ca $\|\bar{\bar{x}}\| < \varepsilon$ şi

$$\lambda_0[D_j f(\bar{\bar{x}}) + 2\bar{\bar{x}}_j] + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k D_j \varphi_k(\bar{\bar{x}}) + \sum_{l=1}^{p} \mu_l D_j \psi_l(\bar{\bar{x}}) = 0, \ j = 1, 2,\ldots, n. \quad (3.5)$$

Cu N din (3.3), definim

$$F(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) + \|\mathrm{x}\|^2 + N\left\{\sum_{k=1}^{q} \varphi_k^2(\mathrm{x}) + \sum_{l=1}^{p} [\psi_l^*(\mathrm{x})]^2\right\}, \ \mathrm{x} \in U.$$

Fie $\bar{\bar{x}}$ punctul de minim al restricţiei lui $F(\mathrm{x})$ la $\bar{B}(0, \varepsilon)$. Deoarece $F(\bar{\bar{\mathrm{x}}}) \leqslant \leqslant F(0)=0$, în baza lui (3.3) nu putem avea $\|\bar{\bar{\mathrm{x}}}\| = \varepsilon$, astfel încît $\bar{\bar{x}} \in B(0, \varepsilon)$ şi derivatele parţiale de ordinul întîi ale lui F trebuie să fie nule în $\bar{\bar{x}}$. Derivatele lui $[\psi_l^*]^2$ în $\bar{\bar{\mathrm{x}}}$ sînt $2\psi_l^*(\bar{\bar{\mathrm{x}}}) D_j\psi_l^*(\bar{\bar{\mathrm{x}}})$. Într-adevăr acest lucru este evident pentru $\psi_l^*(\mathrm{x}) < 0$, iar acolo unde $\psi_l^*(\mathrm{x})=0$, pătratele $[\psi_l^*]^2$ se anulează cel puţin pînă la ordinul doi. De aceea pentru $j=1, 2, \ldots, n$, avem

$$D_j f(\bar{\bar{\mathrm{x}}}) + 2\bar{\bar{x}}_j + \sum_{k=1}^{q} 2N\varphi_k(\bar{\bar{\mathrm{x}}}) D_j\varphi_k(\bar{\bar{\mathrm{x}}}) + \sum_{l=1}^{p} 2N\, \psi_l^*(\bar{\bar{\mathrm{x}}}) D_j\psi_l(\bar{\bar{\mathrm{x}}}) = 0.$$

Definind

$$L = 1 + \sum_{k=1}^{q} [2N\, \varphi_k(\bar{\bar{\mathrm{x}}})]^2 + \sum_{l=1}^{p} [2N\, \psi_l^*(\bar{\bar{\mathrm{x}}})]^2,$$

$$\lambda_0 = 1/L, \ \lambda_k = 2N\varphi_k(\bar{\bar{\mathrm{x}}})/L, \ k = 1, 2, \ldots, q,$$

$$\mu_l = 2N\psi_l^*(\bar{\bar{\mathrm{x}}})/L, \ l = 1, \ldots, p, \ \mu_{p+1} = \ldots = \mu_r = 0.$$

$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q, \mu_1, \ldots, \mu_r)$ este un vector unitate cu $\lambda_0 > 0$ şi μ_l nepozitive, dovedind că proprietatea (3.5) este adevărată.

Alegem un şir de numere pozitive $\{\varepsilon_m\}$ convergent către zero. Fiecărui $m \in N$ îi corespunde un punct $\bar{\bar{\mathrm{x}}}_m$ cu $\|\bar{\bar{\mathrm{x}}}_m\| < \varepsilon_m$ şi un vector unitate $(\lambda_{0m}, \lambda_{km}, \mu_{lm}, 0, \ldots, 0)$. De asemenea, alegem un subşir al vectorilor unitate care converge către limita $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q, \mu_1, \ldots, \mu_r)$. Deoarece $\bar{\bar{\mathrm{x}}}_m \to \mathrm{x}_0$, relaţia (3. 5) are loc şi cu acest vector limită şi cu x_0 în loc de $\bar{\bar{\mathrm{x}}}$. Mai mult, deoarece restricţiile sînt regulate, λ_0 nu poate fi zero, adică limita lui L cînd $\bar{\bar{\mathrm{x}}}_m \to \mathrm{x}_0$ este finită. Deci numerele $u_k = \dfrac{\lambda_k}{\lambda_0}$, $v_l = \dfrac{\mu_l}{\lambda_0}$ satisfac pe 2).

Observaţii. 1) Deoarece un minim global este şi minim local, condiţiile teoremei sînt necesare şi pentru minimul global.

2) Cu ajutorul funcţiilor f, φ_k şi ψ_l construim o funcţie ajutătoare,

$$\Phi = f - \sum_{k=1}^{q} u_k\varphi_k - \sum_{l=1}^{r} v_l(\psi_l - w_l^2),$$

care depinde de x, de *multiplicatorii lui Lagrange* u_k, de *multiplicatorii Kuhn-Tucker* v_l şi de *variabile de egalizare* w_l. Cu alte cuvinte, Φ este o funcţie de $n + q + 2r$ variabile independente

x_j, u_k, v_l, w_l. Teorema precedentă spune de fapt că punctele de minim local ale lui f trebuie căutate printre punctele critice ale lui Φ. Aceste puncte sînt date de sistemul

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{q} u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \sum_{l=1}^{r} v_l \frac{\partial \psi_l}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_k} = -\varphi_k(\mathbf{x}) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v_l} = -(\psi_l(\mathbf{x}) - w_l^2) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial w_l} = 2v_l w_l = 0.$$

3) Să presupunem că programul nu conține restricții egalități, iar inegalitățile sînt de forma $x_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, $\psi_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$. Notînd $L = f - \sum_{i=1}^{m} v_i \psi_i$, avem $\Phi = L - \sum_{j=1}^{n} v_j x_j + \sum_{j=1}^{n} v_j w_j^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i w_i^2$ și relațiile din 2) se transcriu în forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial x_j} - v_j = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_j} = w_j^2 - x_j = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = w_i^2 - \psi_i = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_j} = 2v_j w_j = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial w_i} = 2v_i w_i = 0.$$

Observăm că $x_j = 0 \Leftrightarrow w_j = 0$ și $\psi_i(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow w_i = 0$. Acestea ne permit să eliminăm variabilele ajutătoare w_i, w_j, astfel încît găsim

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = v_j, \quad x_j \geqslant 0, \quad v_j x_j = 0, \quad \psi_i \geqslant 0, \quad v_i \psi_i = 0.$$

În concluzie, dacă există minimul lui $f(x_1, \ldots, x_n)$ cu restricțiile $x_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, $\psi_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, atunci sînt satisfăcute următoarele condiții:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \geqslant 0, \quad x_j \geqslant 0, \quad x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} \leqslant 0, \quad v_i \geqslant 0, \quad v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

unde $L = f - \sum_{i=1}^{m} v_i \psi_i$ și se numește *funcție Lagrange*, iar $\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial L}{\partial v_i} = -\psi_i$. Kuhn și Tucker au demonstrat că aceste condiții devin și suficiente cînd funcția f este convexă, iar funcțiile ψ_i sînt concave. În particular, le vom utiliza în *teoria programelor liniare* (vezi § 3.8), *a programelor pătratice* (vezi cap. 6) și *a programelor pozinomiale* (vezi cap. 7).

Vom da condiții suficiente pentru existența minimului global cu legături.

Teoremă. *Presupunem că f, φ_k, ψ_l sînt de clasă C^1. Dacă f este convexă, φ_k sînt liniare, ψ_l sînt concave şi dacă pentru punctul $\mathbf{x}_0 \in S$ există numerele u_k şi v_l cu proprietăţile* 1) *şi* 2) *din teorema precedentă, atunci $\mathbf{x}_0$ este un punct de minim global al lui f pe S.*

Demonstraţie. Prin ipoteză funcţia $\Phi = f - \sum_{k=1}^{q} u_k \varphi_k - \sum_{l=1}^{r} v_l(\psi_l - w_l^2)$ este convexă şi $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0$, adică $\mathbf{x}_0$ este un punct critic. Conform proprietăţilor funcţiilor convexe $\mathbf{x}_0$ este un punct de minim global pentru Φ. Pe de altă parte $\Phi(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)$ şi $\Phi(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in S$. De aici rezultă că f admite în $\mathbf{x}_0$ un minim global pe S.

În continuare dăm condiţii suficiente pentru existenţa unui minim local cu legături.

Teoremă. *Presupunem că f, φ_k, ψ_l sînt de clasă C^2 şi că în $\mathbf{x}_0 \in S$ sînt îndeplinite condiţiile:*

(i) *restricţiile sînt regulate,*

(ii) *există numerele u_k, v_l din prima teoremă a acestui paragraf,*

(iii) $d^2\Phi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) > 0$, $\forall \mathbf{h} \neq 0$, *care satisface* $d\varphi_k(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = 0$, $d\psi_l(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = 0$, $l \in L'$. *unde $L' \subset \mathscr{L}(\mathbf{x}_0)$ este mulţimea indicilor pentru care $v_l > 0$. atunci f are în $\mathbf{x}_0$ un minim local.*

Demonstraţie. Raţionăm prin reducre la absurd şi presupunem că f nu admite un minim local în $\mathbf{x}_0 \in S$. Atunci există un şir $\{\mathbf{x}_n\}$ din $\mathbb{R}^n$ cu proprietăţile

$$\mathbf{x}_n \in S, \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_n) \leqslant f(\mathbf{x}_0),$$

$$\varphi_k(\mathbf{x}_n) = 0, k = 1, \ldots, q, \quad \psi_l(\mathbf{x}_n) \geqslant 0, l = 1, \ldots, r.$$

Mai mult, în baza faptului că sfera unitate din $\mathbb{R}^n$ este compactă, putem presupune că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{h} \neq \mathbf{0}.$$

Pe de altă parte, din ipoteză, avem

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h} = \sum_{k=1}^{q} u_k \nabla \varphi_k(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h} + \sum_{l\in L'} v_l \nabla \psi_l(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h},$$

aceasta reducîndu-se la

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \sum_{l\in L'} v_l \, d\psi_l(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}).$$

Deoarece relaţiile $\psi_l(\mathbf{x}_n) \geqslant 0$, $l = 1, \ldots, r$, antrenează $\psi_l(\mathbf{x}_n) \geqslant \psi_l(\mathbf{x}_0) = 0$ pentru $l \in \mathscr{L}(\mathbf{x}_0)$, rezultă că $d\psi_l(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \geqslant 0$, $l \in \mathscr{L}(\mathbf{x}_0)$.

(a) Presupunem că diferențialele $d\psi_l(x_0)(\mathbf{h})$ nu sînt toate nule pentru $l \in L' \subset \mathscr{L}(x_0)$. Deoarece $v_l > 0$ pentru $l \in L'$, avem $df(x_0)(\mathbf{h}) > 0$ și formula

$$f(x_n) = f(x_0) + df(x_0)(\mathbf{h})\,\|x_n - x_0\| + o(\|x_n - x_0\|)$$

arată că pentru n suficient de mare $f(x_n) > f(x_0)$, ceea ce este contradictoriu.

(b) Presupunem că toate diferențialele $d\psi_l(x_0)(\mathbf{h})$, $l \in L'$, sînt nule. Deoarece $d\Phi(x_0) = 0$, putem scrie

$$\Phi(x_n) = \Phi(x_0) + \frac{1}{2}\, d^2\Phi(x_0, \mathbf{h})\,\|x_n - x_0\|^2 + o(\|x_n - x_0\|).$$

Astfel pentru n suficient de mare avem $\Phi(x_n) > \Phi(x_0)$. Pe de altă parte $\Phi(x) \leqslant f(x)$, $\forall x \in S$ și $\Phi(x_0) = f(x_0)$. De aceea pentru n suficient de mare $f(x_n) > f(x_0)$, ceea ce este contradictoriu; deci afirmația din teoremă este adevărată.

Observație. Problemele de maxim se tratează analog.

Exemplu. Să se determine maximul funcției

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \quad \text{cu restricțiile } 0 < p_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Rezolvare. Mai întîi observăm că restricțiile inegalități nu pot fi active. Se știe că dacă funcția

$$\Phi = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i - u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right)$$

are un maxim, atunci această valoare este maximul lui H. Punctele critice ale lui Φ sînt date de sistemul

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_i} = -\log_2 p_i - \frac{1}{\ln 2} - u = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u} = -\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right) = 0.$$

Rezultă $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$. Pe de altă parte

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial p_i^2} = -\frac{1}{p_i \ln 2}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_i\,\partial p_j} = 0, \quad i \neq j,$$

adică $d^2\Phi = -\dfrac{1}{\ln 2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}(dp_i)^2$. Această diferențială este negativ definită. În particular, este negativ definită și pentru $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} dp_i = 0$ așa încît $p_1 = \ldots = p_n = 1/n$ este un punct de maxim pentru H și $\max H = \dfrac{1}{n}\log_2 n + \ldots + \dfrac{1}{n}\log_2 n = \log_2 n$.

3.20. Să se rezolve programul min $(c_1x_1^{a_1} + \ldots + c_nx_n^{a_n})$ cu restricţiile $x_i > 0$, $x_1 \ldots x_n \leqslant P$.

Rezolvare. Considerăm funcţia

$$\Phi = c_1x_1^{a_1} + \ldots + c_nx_n^{a_n} - v(P - x_1 \ldots x_n - w^2).$$

Punctele critice ale lui Φ sînt soluţiile sistemului

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = c_ia_ix_i^{a_i-1} + vx_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = -(P - x_1 \ldots x_n - w^2) = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial w} = 2vw = 0.$$

Se observă că v nu poate fi nul, adică restricţia $x_1 \ldots x_n \leqslant P$ trebuie să fie neapărat activă şi corespunzător $v > 0$. De aceea $w = 0$ şi deci $c_ia_ix_i^{a_i} + vP = 0$, $x_1 \ldots x_n = P$. Deoarece $v > 0$, $P > 0$, acest sistem admite soluţie numai dacă $c_ia_i < 0$:

$$x_i = \left(-\frac{P}{c_ia_i}\right)^{1/a_i} v^{1/a_i}, \quad v = \left(\frac{P}{-\left(\frac{P}{c_1a_1}\right)^{\frac{1}{a_1}} \ldots \left(-\frac{P}{c_na_n}\right)^{\frac{1}{a_n}}}\right)^{\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)^{-1}}.$$

În punctul $(x_1, \ldots, x_n)$ calculăm derivatele de ordinul doi:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2} = c_ia_i(a_i - 1)\, x_i^{a_i-2} = -vP(a_i - 1)\frac{1}{x_i^2},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\, \partial x_j} = vx_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_{j-1}\, x_{j+1} \ldots x_n = \frac{vP}{x_ix_j}, \quad i \neq j.$$

Cu acestea găsim

$$d^2\Phi = vP\left[\sum_{i=1}^{n}(1 - a_i)\frac{dx_i^2}{x_i^2} + 2\sum_{i<j}\frac{dx_i}{x_i}\frac{dx_j}{x_j}\right] = vP\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}a_i\frac{dx_i^2}{x_i^2}\right]\right.$$

şi deoarece $x_1 \ldots x_n = P$, adică $\sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i}{x_i} = 0$, rezultă $d^2\Phi = -vP\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{dx_i^2}{x_i^2}$. Această formă pătratică este pozitiv definită dacă şi numai dacă $a_i < 0$. De aceea problema pusă iniţial are soluţie numai pentru $c_i > 0$, $a_i < 0$. Punctul de minim are coordonatele $x_i = \left(-\frac{P}{c_ia_i}\right)^{1/a_i} v^{1/a_i}$, v avînd valoarea de mai înainte, iar min $\sum_{i=1}^{n}c_ix_i^{a_i} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{vP}{a_i}$.

3.21. Să se demonstreze relaţia

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

Rezolvare. Căutăm minimul lui $f=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)/n$ cu restricția $x_1+x_2+\ldots+x_n=A$. Fie funcția lui Lagrange

$$\Phi=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-u(x_1+x_2+\ldots+x_n-A).$$

Din $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\frac{2x_i}{n}-u=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u}=A-(x_1+x_2+\ldots+x_n)=0$ rezultă $x_i=\frac{A}{n}$ și $u=\frac{2A}{n^2}$. Pe de altă parte $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{2}{n}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_j}=0$, $i\neq j$. De aceea $d^2\Phi>0$ și deci $x_i=\frac{A}{n}$ este un punct de minim pentru f. În plus, $\min f=\left(\frac{A}{n}\right)^2$, astfel încît $f\geqslant\left(\frac{A}{n}\right)^2=\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2$.

3.22. O uzină produce n produse distincte, fiecare într-o cantitate q_i și cu un cost $c_i=c_i(q_i)$. Costul total este $C=\sum_{i=1}^{n}c_i(q_i)$. Să se găsească condițiile de minimizare a costului total supus cerinței ca producția totală a uzinei să fie $q=\sum_{i=1}^{n}q_i$.

Rezolvare. Punctele critice ale funcției (Lagrange) definite prin

$$\Phi(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ \lambda)=\sum_{i=1}^{n}c_i(q_i)-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}q_i-q\right)$$

sînt soluțiile sistemului $\frac{dc_i}{dq_i}-\lambda=0$, $\sum_{i=1}^{n}q_i=q$.

Fie $(q_{i0},\ \lambda_0)$ un punct critic, $a_i=\frac{d^2c_i}{dq_i^2}$ și $a_{i0}=\frac{d^2c_i}{dq_i^2}(q_{i0})$. Restricția lui

$$d^2\Phi(q_1,\ \ldots,\ q_n)(dq_1,\ \ldots,\ dq_n)=\sum_{i=1}^{n}a_i(q_1,\ \ldots,\ q_n)\,dq_i^2 \quad \text{la} \quad q_i=q_{i0},\ \sum_{i=1}^{n}dq_i=0$$

are expresia

$$\sum_{j=2}^{n}(a_{10}+a_{j0})\,dq_j^2+2a_{10}\sum_{2\leqslant j<k}dq_j\,dq_k. \qquad (*)$$

Dacă $\Delta_{10}=a_{10}+a_{20}>0$, $\Delta_{20}=a_{10}a_{20}+a_{10}a_{30}+a_{20}a_{30}>0,\ldots$ atunci (*) este pozitiv definită și deci punctul $(q_{10},\ \ldots,\ q_{n0})$ este un punct de minim pentru C, adică $C_0=\sum_{i=1}^{n}c_i(q_{i0})$ este alocația optimă.

Din punct de vedere economic $\lambda=\frac{dc_1}{dq_1}=\ldots=\frac{dc_n}{dq_n}$ reprezintă costul marginal, iar $a_{i0}=\frac{d^2c_i}{dq_i^2}(q_{i0})$ reprezintă viteza de variație a acestui cost. Utilizarea acestor indicatori

este condiționată de raționamente de tipul următor. Să presupunem că valoarea absolută a vitezei de scădere a costului marginal în fabricarea primului produs este mai mică decît vitezele de creștere a costului marginal pentru celelalte produse, adică $a_{10} < 0$, $|a_{10}| < a_{j0}$, $j \in \{2, \ldots, n\}$. Această ipoteză este echivalentă cu $a_{10} < 0$, $a_{j0} > 0$, $a_{10} + a_{j0} > 0$, $j \in \{2, \ldots, n\}$, și implică $a_{10}a_{20} \ldots a_{n0} < 0$. De aceea condiția

$$\Delta_{n0} = \left(\frac{1}{a_{10}} + \frac{1}{a_{20}} + \ldots + \frac{1}{a_{n0}}\right) a_{10}\, a_{20} \ldots a_{n0} > 0$$

este îndeplinită numai pentru $|a_{10}| < \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{a_{j0}}\right)^{-1}$.

3.8. Programe liniare

Programarea liniară se ocupă cu problema optimizării (găsirea minimului sau maximului) unei funcții liniare $\mathrm{x} \to f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, știind că variabilele x_j satisfac unele restricții date prin egalități sau inegalități liniare. Ținînd seama de proprietățile ecuațiilor și inecuațiilor în $\mathbb{R}$, de faptul că orice număr real poate fi scris ca diferența a două numere reale pozitive și de relația $\min f(\mathrm{x}) = -\max(-f(\mathrm{x}))$, rezultă că orice program liniar poate fi adus la un program liniar echivalent de tipul următor: *să se găsească* $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ *cu restricțiile*

$$S: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

$\mathrm{x} \to f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ se numește *funcție obiectiv,* iar mulțimea S se numește *hiperpoliedrul restricțiilor. Funcția lui Lagrange* atașată acestei probleme este

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to L(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right).$$

Deoarece funcțiile liniar afine sînt și convexe și concave, mulțimea S este convexă și condițiile Kuhn-Tucker (vezi § 3.7)

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geqslant 0,\quad x_j \geqslant 0,\quad x_j\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}\right) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0,\quad y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

sînt condiții necesare și suficiente pentru un minim global.

Se observă că expresia $L(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ poate fi scrisă în forma

$$L(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - c_j \right).$$

Dar în aceasta recunoaştem funcţia Lagrange ataşată unui alt program liniar : *să se găsească* $\max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ *cu restricţiile*

$$T: \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \leqslant c_j, \; j = 1, 2, \ldots, n; \; y_i \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Programele liniare precedente se numesc *duale unul altuia.* Evident variabilele x_j din programul iniţial sînt multiplicatori în programul dual şi variabilele y_i în programul dual sînt multiplicatori în programul iniţial. În plus, condiţiile Kuhn-Tucker corespunzătoare programului dual sînt necesare şi suficiente pentru existenţa maximului global şi ele sînt aceleaşi cu relaţiile Kuhn-Tucker ataşate programului iniţial.

Consideraţiile precedente arată că dacă sînt satisfăcute relaţiile Kuhn-Tucker, atunci $\min_{\mathrm{x} \in S} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \max_{\mathrm{y} \in T} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, iar găsirea vectorului optimal al programului liniar dat din cunoaşterea vectorului optimal pentru programul liniar dual se bazează pe regulile următoare :

— dacă restricţia k a unuia dintre programe devine o inegalitate strictă, atunci variabila k a dualului trebuie să fie zero ;

— dacă valoarea variabilei k a unuia dintre programe este strict pozitivă, atunci restricţia k a dualului trebuie să fie o egalitate.

Funcţiei obiectiv $\mathrm{x} \to f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ i se poate ataşa un fascicul de hiperplane de nivel, paralele, $H_f: \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - f = 0$. Deoarece distanţa de la originea $(0, 0, \ldots, 0)$ la H_f este $d = \dfrac{|f|}{\sqrt{c_1^2 + \ldots + c_n^2}}$, extremele lui f pe S sînt proporţionale cu extremele lui d pe S. Pe de altă parte, extremele lui d (dacă există) sînt atinse cel puţin în vîrfuri ale hiperpoliedrului restricţiilor. Înseamnă că pentru determinarea optimului lui f ar fi suficient să determinăm vîrfurile hiperpoliedrului restricţiilor (punctele în care n dintre restricţii sînt egalităţi), să calculăm valorile lui f în aceste puncte şi să selectăm valoarea cea mai mică sau cea mai mare. În general însă, obţinerea soluţiei optime prin determinarea tuturor vîrfurilor hiperpoliedrului restricţiilor necesită o muncă enormă, fapt care a determinat căutarea unei metode analitice iterative care să reducă la minim numărul de calcule. Algoritmul cel mai important a fost găsit de matematicianul G. Dantzig (1947) şi poartă numele de *metoda simplex.*

Pentru problema de minim, metoda simplex constă în următoarele reguli.

I. Să presupunem că toate numerele $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sînt negative. Introducînd *variabilele de egalizare* $w_1, w_2, \ldots, w_m$, obţinem un program liniar echivalent

$$\min f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

cu restricţiile

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i = w_i, \quad x_j \geqslant 0, \quad w_i \geqslant 0.$$

Ataşăm un tabel simplex

x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n		
a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}	$-b_1$	w_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i1}	a_{i2}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{in}	$-b_i$	w_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mj}	$\ldots$	a_{mn}	$-b_m$	w_m
c_1	c_2	$\ldots$	c_j	$\ldots$	c_n	0	f

Evident toate $-b_i, i=1, \ldots, m$, din tabelul simplex sînt pozitive şi punctul $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$ este un vîrf al hiperpoliedrului restricţiilor.

Regula 1. Alegem un element strict negativ în ultima linie a tabelului simplex. Dacă ultima linia a tabelului simplex nu conţine elemente strict negative, atunci valoarea minimă a lui f este 0 şi $(0,0,\ldots,0)$ este un punct de minim.

Regula 2. Să presupunem că regula 1 dă elementul c_j de la capătul de jos al coloanei j. Formăm cîturile $-b_i/a_{ij}$, $i=1, 2, \ldots, m$, j=fixat, pentru care $a_{ij} < 0$. Acel element $a_{ij} < 0$ care dă cel mai mare cît $-b_i/a_{ij}$ se numeşte *pivot*.

Dacă toate elementele coloanei j sînt pozitive sau nule, atunci programul liniar propus nu admite soluţie. Într-adevăr, în acest caz x_j poate fi făcut oricît de mare fără a afecta restricţiile, iar aceasta împreună cu $c_j < 0$ implică faptul că termenul $c_j x_j$ din f, şi deci f, este nemărginit inferior.

Regula 3. Schimbăm pe x_j cu w_i. Înlocuim pivotul cu inversul său. Celelalte elemente ale liniei pivotului se înlocuiesc respectiv prin cîturile $-\frac{\text{elementele liniei}}{\text{pivot}}$; celelalte elemente ale coloanei pivotului se înlocuiesc respectiv prin cîturile $\frac{\text{elementele coloanei}}{\text{pivot}}$.

Regula 4. Toate celelalte elemente r din tabel se înlocuiesc respectiv prin elemente de forma $r^* = \frac{pr - sq}{p}$, unde p este elementul pivot, iar q şi s sînt elemente din tabel dispuse astfel:

$$\begin{array}{ccc} p & \text{———} & q \\ | & & | \\ s & \text{———} & r \end{array}$$

Regulile 1 şi 2 localizează un nou vîrf pe una din axele de coordonate. Regulile 3 şi 4 conduc la un nou tabel care corespunde unei probleme echivalente. Prin iteraţie se obţine un şir de tabele.

Dacă iteraţia se opreşte în raport cu regula 1, atunci programul propus are soluţie. Valoarea minimă a lui f se citeşte din colţul din dreapta jos al ultimului tabel, iar punctul de minim se citeşte astfel: x-şii care se găsesc deasupra tabelului se egalează cu zero, iar x-şii care apar pe marginea din dreapta iau valorile corespunzătoare din coloana b-urilor.

Dacă iteraţia se opreşte în raport cu regula 2, atunci programul nu admite soluţie. În acest caz numărul $f(\mathrm{x})$ poate fi făcut oricît de mic fără a afecta restricţiile.

Aplicarea repetată a regulilor 1—4 nu conduce întotdeauna la soluţia programului liniar. O asemenea situaţie poate avea loc numai dacă unul dintre tabele are şi zerouri în coloana b-urilor şi dacă apare *fenomenul de ciclare.*

II. Dacă cel puţin una dintre constantele b_i este strict pozitivă, atunci regulile 1—4 nu sînt aplicabile direct, dar programul poate fi transformat într-unul echivalent la care aceste reguli să funcţioneze.

De exemplu, dacă presupunem că primele p constante $b_1, \ldots, b_p$ sînt strict pozitive şi că celelalte, $b_{p+1}, \ldots, b_m$, sînt toate negative, atunci programul liniar modificat este următorul:

$$\min g(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{p} \left(- \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} + b_i \right)$$

cu restricțiile

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} + b_i = w_i,\ i = 1,\ldots, p,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = w_i,\ i = p+1,\ldots, m,\quad x_j \geqslant 0,\ x_{n+i} \geqslant 0,\ w_i \geqslant 0,$$

unde M este o constantă pozitivă suficient de mare.

Soluția programului liniar original este conținută în soluția programului modificat, iar aceasta din urmă poate fi găsită cu ajutorul regulilor 1—4.

Exemplu. Un atelier produce două tipuri de piese A și B. Beneficiul net este de 2 lei pentru o piesă de tipul A și de 1,5 lei pentru o piesă de tipul B. Timpul de fabricație pentru tipul A este de două ori mai mare decît timpul de fabricație pentru B. Dacă toate piesele ar fi de tipul B, atelierul ar putea produce 1000 de piese pe zi. Aprovizionarea cu materiale ajunge pentru 800 piese (tipul A și B), iar capacitatea atelierului este cel mult 400 piese de tipul A și 700 de piese de tipul B. Cîte piese de tipul A și cîte de tipul B trebuie fabricate într-o zi pentru ca beneficiul total al atelierului să fie maxim?

Rezolvare. Fie y_1 numărul de sute de piese de tipul A și y_2 numărul de sute de piese de tipul B, fabricate într-o zi. Avem de rezolvat programul: max $\left(2y_1 + \frac{3}{2}y_2\right)$ cu restricțiile $y_1 \leqslant 4$, $y_2 < 7$, $y_1 + y_2 < 8$, $2y_1 + y_2 < 10$, $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$.

Această problemă este echivalentă cu min $\left(-2y_1 - \frac{3}{2}y_2\right)$ cu restricțiile $-y_1 \geqslant -4$, $-y_2 \geqslant -7$, $-y_1 - y_2 \geqslant -8$, $-2y_1 - y_2 \geqslant -10$, $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$. Aici regulile 1—4 sînt aplicabile direct. Rezultă

y_1	y_2		
-1	0	4	w_1
0	-1	7	w_2
-1	-1	8	w_3
-2	-1	10	w_4
-2	$-3/2$	0	h

w_1	y_2		
-1	0	4	y_1
0	-1	7	w_2
1	-1	4	w_3
2	-1	2	w_4
2	$-3/2$	-8	h

w_1	w_4		
-1	0	4	y_1
-2	1	5	w_2
-1	1	2	w_3
2	-1	2	y_2
-1	$3/2$	-11	h

w_3	w_4		
1	-1	2	y_1
2	-1	1	w_2
-1	1	2	w_1
-2	1	6	y_2
1	$1/2$	-13	h

Se observă că în căsuțele c-urilor din ultimul tabel nu sînt decît numere strict pozitive. De aceea acest tabel dă soluția problemei și anume: $\min\left(-2y_1 - \frac{3}{2}y_2\right) = -13$ și punctul de minim are coordonatele $y_1 = 2$, $y_2 = 6$.

Revenind la problema inițială găsim $\max\left(2y_1 + \frac{3}{2}y_2\right) = 13$ pentru $y_1 = 2$, $y_2 = 6$.

O b s e r v a ț i e. Programul liniar dual atașat programului inițial din exemplul precedent este $\min(4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4)$ cu restricțiile

$$x_1 + x_3 + 2x_4 \geqslant 2, \quad x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 3/2, \quad x_j \geqslant 0, \; j = 1, 2, 3, 4.$$

Deoarece membrii din dreapta, 2 și 3/2, sînt strict pozitivi, pentru rezolvarea acestui program nu putem aplica direct regulile 1—4. Se introduc două variabile noi x_5 și x_6 și se caută minimul funcției liniare modificate

$$g(x) = 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4 + M(-x_1 - x_3 - 2x_4 + x_5 + 2 - x_2 - x_3 - x_4 + x_6 + 3/2)$$

cu restricțiile

$$-x_1 - x_3 - 2x_4 + x_5 + 2 = w_1, \quad -x_2 - x_3 - x_4 + x_6 + 3/2 = w_2, \quad x_j \geqslant 0, \quad w_i \geqslant 0,$$

unde M este o constantă pozitivă suficient de mare. Alcătuim tabelul

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
-1	0	-1	-2	1	0	2	w_1
0	-1	-1	-1	0	1	$3/2$	w_2
$4-M$	$7-M$	$8-2M$	$10-3M$	M	M	$\frac{7}{2}M$	g

Deoarece M este un număr pozitiv suficient de mare, elementul $10-3M$ din capătul de jos a coloanei a patra este negativ. Apoi. observăm că elementul încercuit -2 al acestei coloane este pivot. Regulile 3—4 conduc la un nou tabel

x_1	x_2	x_3	w_1	x_5	x_6		
$-1/2$	0	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	0	1	x_4
$1/2$	-1	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	1	$1/2$	w_2
$\frac{M-2}{2}$	$7-M$	$\frac{6-M}{2}$	$\frac{3M-10}{2}$	$\frac{10-M}{2}$	M	$\frac{M+20}{2}$	g

Se observă că $(6 - M)/2$ este negativ, iar $-1/2$ este pivot. De aceea putem trece la un alt tabel:

x_1	x_2	w_2	w_1	x_5	x_6		
-1	1	1	-1	1	-1	$1/2$	x_4
1	-2	-2	1	-1	2	1	x_3
2	1	$M-6$	$M-5$	2	6	13	g

Deoarece M este pozitiv și suficient de mare, numerele 2, 1, $M-6$, $M-5$, 2, 6 de pe ultima linie sînt strict pozitive. Astfel ultimul tabel dă soluția optimă: $\min(4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4) = 13$ și $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1/2$ este punctul de minim.

3.9. Probleme propuse

3.1. Să se arate că mulțimile

$$\{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0,\ 2x^3 + 3x^2y + 6y^2 + 5y^3 \leqslant c = \text{const}\}.$$

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i > 0,\ \Sigma\, x_i^{\alpha_i} \leqslant c = \text{const},\ \alpha_i \geqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}$$

sînt respectiv convexe.

3.2. Fie $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 + x_2 - x_3 - 3$ și $f_2(x) = x_1^2 + x_1 - 4x_2$. Să se arate că $\{x = (x_1, x_2, x_3) \mid f_1(x) \leqslant 0,\ f_2(x) \leqslant 0\}$ este o mulțime convexă.

3.3. Să se cerceteze convexitatea funcțiilor reale definite respectiv prin:

1) $f(x, y) = [\min\limits_{\theta \in (0, \pi/2)} (x \operatorname{tg} \theta + y \operatorname{ctg} \theta + x + y)]^{1/2},\ x, y > 0$;

2) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},\ x_i > 0$.

R. 1) Concavă. 2) Convexă, dacă $\alpha_i < 0$ sau dacă $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \geqslant 1$ și $n-1$ dintre numerele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt negative.

3.4. Să se verifice relațiile:

1) $\min\limits_{y \in [0,1]} \max\limits_{x \in [0,1]} (16y^6 - 3xy + x^2) = \dfrac{16}{729}$,

2) $\max\limits_{x \in [0,1]} \min\limits_{y \in [0,1]} \sin \dfrac{\pi(x + y)}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

3) $\inf\limits_{(s,t) \in \mathbb{R}^2} \sup\limits_{x \in [-1,1]} |x^2 + sx + t| = \dfrac{1}{2}$.

3.5. Să se găsească extremele locale ale funcțiilor reale definite respectiv prin:

1) $f(x, y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$, 2) $f(x, y) = xy + 2a^3\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$,

3) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

R. 1) Punct de minim $(0, 0)$ și $f_{\min} = 0$. 2) Punct de minim $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{2})$ și $f_{\min} = 3a^2\sqrt[3]{4}$,

3) $f_{\min} = f\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 1\right) = -\dfrac{4}{3}$.

3.6. Să se determine parametrul real λ astfel încît funcţia reală $(x, y) \to f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + \lambda$ să aibă minimul global egal cu zero.

R. $\lambda = 16$.

3.7. Să se verifice că punctele critice ale funcţiei $(x,y) \to f(x,y) = x^2e^y$ sînt puncte de minim global.

3.8. Să se cerceteze extremele locale ale funcţiilor reale definite respectiv prin:

1) $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + \dfrac{b}{x_1 \ldots x_n}$, $a_i, b > 0$, $x_1 \ldots x_n \neq 0$;

2) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2^2 \ldots x_n^n(1 - x_1 - 2x_2 - \ldots - nx_n)$, $x_i > 0$,

R. 1) $x_i = \dfrac{1}{a_i}(a_1, \ldots a_nb)^{1/(n+1)}$ sînt coordonatele unui punct de minim; dacă n este impar, atunci $x_i = -\dfrac{1}{a_i}(a_1 \ldots a_nb)^{1/(n+1)}$ sînt coordonatele unui punct de maxim. 2) Punct de maxim, $x_i = \dfrac{2}{n^2 + n + 2}$.

3.9. Să se determine natura punctelor critice pentru funcţiile implicite definite respectiv prin:

1) $x \to y(x)$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$, $y(\sqrt[3]{2}) > 0$;

2) $(x, y) \to z(x, y)$, $f(x, y, z) = x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$, $z(-1, 2) > 0$;

3) $(x, y) \to z(x, y)$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + x^2 + z^2 - 1 = 0$, $z(0, 0) > 0$.

R. 1) $x_{max} = \sqrt[3]{2}$. 2) Punct de minim $(-1, 2)$, punct critic nedegenerat $(1, 2)$. 3) $\max z = z(0, 0) = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

3.10. Să se găsească punctele critice ale funcţiei definite prin $z = \sin x \operatorname{ch} y$ şi apoi să se stabilească natura lor.

R. $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, puncte critice nedegenerate.

3.11. Fie $[a_{ij}]$ şi $[b_{ij}]$ două matrice pătrate reale şi simetrice. Să se determine valorile critice ale funcţiei definite prin

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j}.$$

R. Soluțiile ecuației $\det[a_{ij} - \lambda b_{ij}] = 0$.

3.12. Fie $f(x, y) = 3(x^2 + y^2)^4 - 8(x^2 + y^2)^3 + 6(x^2 + y^2)^2$. Notînd $r^2 = x^2 + y^2$, să se determine punctele critice ale lui f și să se arate că f nu este o funcție Morse.

3.13. Fie $f: S \to \mathbb{R}$ o funcție omogenă și de clasă C^2. Să se arate că: 1) punctele critice ale lui f sînt zerouri ale lui f, 2) punctele critice ale lui f, care au cel puțin o coordonată nenulă, sînt degenerate.

Indicație. Funcția f este omogenă, avînd gradul de omogenitate p, dacă și numai dacă verifică ecuația Euler $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x})$.

3.14. Utilizînd metoda gradientului, să se determine minimul lui f;

1) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x + y$, 2) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$.

R. 1) $\min f = f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$. 2) $\min f = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$.

3.15. Folosind metoda rețelei, să se sugereze maximul și minimul funcției $f: [1, 18] \times \left[\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right] \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x, y) = e^{-(x+y)}\left[\frac{1}{4} - \sin\sqrt{x^2 + xy + y^2}\right]$.

Indicație. Se va folosi programul din 3.5.

3.16. Să se determine funcția afină $f(x, y) = ax + by + c$ care minimizează eroarea pătratică $E(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i, y_i) - z_i)^2$, unde (x_i, y_i) sînt n puncte distincte date, iar z_i sînt n numere reale date.

3.17. Să se aproximeze $y = x^2$, $x \in [0, \pi/2]$ printr-o funcție de forma $\Phi(x) = \sin 2mx + \cos 2nx$, determinînd parametrii $m, n \in \mathbb{N}$ prin metoda celor mai mici pătrate.

3.18. Să se determine a și b astfel încît integrala $\int_0^1 (ax + b - f(x))^2\, dx$ să fie cît mai mică posibil dacă: 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$.

R. 1) $a = 1$, $b = -\frac{1}{6}$; 2) $a = 6\ln 2 - \frac{3\pi}{2}$, $b = \pi - 3\ln 2$.

3.19. Să se găsească $\min(5x_1 - 2x_2 - x_3)$ cu restricțiile $6x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leqslant 6$, $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$, $2x_1 - x_2 + 4x_3 \geqslant 4$, $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$.

R. Punctul de minim este $\left(0, \frac{20}{7}, \frac{12}{7}\right)$, iar valoarea minimă este $\frac{-52}{7}$.

3.20. Să se rezolve problema

$$\min_{x \in S} f(x) = (1 - x_1 + 2x_2)(1 + x_1 - 2x_2),$$

unde $S = \{x = (x_1, x_2) \mid x \geqslant 0,\ x_1 - 3x_2 \leqslant 1,\ -3x_1 + 2x_2 \leqslant 2,\ x_1 + x_2 \leqslant 5\}$.

R. $\min f(x) = f\left(\frac{8}{5}, \frac{17}{5}\right) = -\frac{651}{25}$.

3.21. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încît $ac - b^2 > 0$. Să se arate că extremele funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2$ pe elipsa $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ sînt de forma $\frac{1}{\lambda_1}$ şi $\frac{1}{\lambda_2}$, unde λ_1 şi λ_2 sînt valorile proprii ale matricei $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

3.22. Să se determine dimensiunile unei cisterne, avînd forma unui paralelipiped drept astfel ca să aibă: 1) aria totală egală cu $2a^2$ şi capacitatea maximă; 2) suma celor trei dimensiuni egală cu a şi aria totală maximă; 3) capacitate dată a^3 şi aria totală minimă.

R. 1) $V_{\max} = V\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$; 2) $S_{\max} = S\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{2a^2}{3}$; 3) $S_{\min} = S(a, a, a) = 6a^2$.

3.23. Să se verifice că extremele funcţiei $(x, y, z) \to f(x, y, z) = xyz$, cu legăturile $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$, sînt $f_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$, $f_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

3.24. Să se determine distanţa de la origine la curba 1) $C: 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$; 2) $C: x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

R. $d = 1$.

3.25. Să se afle $\max(2x + y)$ în condiţiile $x^2 + y^2 \leqslant 25$, $x^2 - y^2 \leqslant 7$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

R. $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\max(2x + y) = 11$.

3.26. Să se determine $\min(x_1x_2^2 - 8x_1^2 - 10x_1)$ cu restricţiile $2x_1 + x_2 - 15 \leqslant 0$, $-5x_1 + 4x_2 + 5 \leqslant 0$, $-7x_1 + 6x_2 + 7 \leqslant 0$, $x_1 - 8 \leqslant 0$.

3.27. Să se maximizeze $f(x) = x_1x_2$ cu restricţiile $-x_1 - x_2^2 + 1 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 \geqslant 0$.

R. $\max f(x) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

3.28. Să se minimizeze $f(x) = \ln x_1 - x_2$ cu restricţiile $x_1 \geqslant 1$, $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

R. $\min f(x) = f(1, \sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

3.29. Într-un atelier dotat cu strunguri, freze şi raboteze trebuie să se prelucreze două tipuri de piese P_1 şi P_2. Timpii t_{ij} de prelucrare a pieselor, capacităţile c_i de prelucrare pe maşinile M_i şi beneficiul b_j obţinut la piese de tipul P_j sînt următoarele :

	P_1	P_2	c_i (ore/lună)
M_1 — strunguri	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 1$	100
M_2 — freze	$t_{21} = 1$	$t_{22} = 4$	160
M_3 — raboteze	$t_{31} = 1$	$t_{32} = 2$	110
b_j (lei/buc.)	40	120	

Cîte piese de tipul P_1 şi cîte de tipul P_2 trebuie prelucrate pentru a asigura un beneficiu maxim?

R. $f_{max} = f(15, 25) = 5\,400$.

3.38. Să se determine minimul funcţiei $x \to f(x) = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ cu restricţiile $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$, $-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$, $-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$, $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, 6$.

R. $x_1 = x_4 = x_5 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_6 = 11$; $f_{min} = -11$.

4

GEOMETRIA CATASTROFELOR ELEMENTARE

4.1. Introducere

Teoria contactului, teoria lui Morse, teoria sistemelor structural stabile etc. au condus la ceea ce azi este cunoscut sub denumimirea *teoria catastrofelor*. Această nouă teorie aplică cu succes în probleme de stabilitate, geometria fluidelor, optică şi teoria scateringului, structuri elastice, termodinamică, fizica laserilor, biologie şi ecologie etc. [25].

Fie $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă. $\mathbb{R}^n$ este numit *spaţiul stărilor*, iar $\mathbb{R}^m$ este numit *spaţiul de control*.

Fie $\mathbf{c}$ un punct din $\mathbb{R}^m$. Restricţia lui f la $\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{c}\}$, adică funcţia parţială $\mathbf{x} \to f_{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$ se notează cu $f_{\mathbf{c}}$ şi se numeşte *potenţial*. Astfel, f poate fi gîndită ca o familie de potenţiale.

Mulţimea tuturor punctelor critice ale potenţialelor $f_{\mathbf{c}}$ din familia f, adică submulţimea M a lui $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ caracterizată prin

$$\frac{\partial f_{\mathbf{c}}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0, \ldots, \frac{\partial f_{\mathbf{c}}}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0,$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, se numeşte *varietatea catastrofă*. Desigur M este o varietate diferenţiabilă de dimensiune m numai dacă f are anumite proprietăţi care sînt îndeplinite în cazuri particulare.

Fie $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ proiecţia naturală definită prin $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \mathbf{c}$. Restricţia lui π la M se notează cu χ şi se numeşte *aplicaţia catastrofă*.

Submulţimea S a lui M formată din punctele singulare ($\equiv$ critice) ale aplicaţiei catastrofă $\chi: M \to \mathbb{R}^m$, adică din punctele în care rangul matricei jacobian $J(\chi)$ este mai mic decît m, se numeşte *mulţimea singularităţilor*. Imaginea $B = \chi(S) \subset \mathbb{R}^m$ este numită *mulţimea bifurcaţie*. Aceasta este observabilă, întrucît se află în spaţiul de control şi în multe aplicaţii constituie miezul problemelor respective.

Explicitînd jacobianul lui χ, se constată că S este de fapt mulţimea punctelor $(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \in M$ care sînt puncte critice degenerate pentru func-

ţia parţială $\mathbf{x} \to f_c(\mathbf{x})$. Cu alte cuvinte, S este caracterizată prin ecuaţiile $\frac{\partial f_c}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0, \ldots, \frac{\partial f_c}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0$, $\det\left[\frac{\partial^2 f_c}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})\right] = 0$. Rezultă că B este mulţimea pe care numărul şi natura punctelor critice se schimbă; teoria stabilităţii structurale a funcţiilor Morse arată că o asemenea schimbare poate să aibă loc numai dacă se trece printr-un punct critic degenerat. Punctelor critice degenerate ale funcţiei $\mathbf{x} \to f_c(\mathbf{x})$ le corespund puncte ale graficului acestei funcţii în care curbura Gauss-Kronecker,

$$K = \det\left[\frac{\partial^2 f_c}{\partial x_i \partial x_j}\right] \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_c}{\partial x_i}\right)^2\right)^{(n/2)+1},$$

este nulă.

Termenul de *catastrofă* este utilizat pentru a marca faptul că o variaţie netedă în spaţiul de control determină o schimbare discontinuă (un salt) în spaţiul stărilor. Cu alte cuvinte, *catastrofa* înseamnă un punct din S cu proprietatea că o perturbare suficient de mică a potenţialului nu alterează difeotipul său.

Teoria generală arată că familiile de funcţii pot fi clasificate astfel încît structura punctelor critice să nu fie afectată calitativ de schimbări potrivite de coordonate. În particular aproape toate familiile, cu $m \leqslant 4$ parametri, de funcţii reale diferenţiabile definite pe $\mathbb{R}^n$, sînt structural stabile şi sînt echivalente în vecinătatea oricărui punct cu una dintre următoarele forme [25]:

1) *necritică*: x_1,

l-şa Morse: $x_1^2 + \ldots + x_l^2 - x_{l+1}^2 - \ldots - x_n^2$, $0 \leqslant l \leqslant n$.

(Aceste două tipuri nu sînt forme catastrofă, întrucît nu au puncte critice degenerate şi rămîn neschimbate în raport cu variaţiile din spaţiul de control. Toate cele care urmează posedă puncte critice degenerate, depind de variabilele de control şi deci sînt catastrofe).

2) *catastrofe cuspidale*:

faldul: $\frac{1}{3}x_1^3 + c_1 x_1 + (M)$,

întoarcerea: $\pm\left(\frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}c_1 x_1^2 + c_2 x_1\right) + (M)$,

rîndunica: $\frac{1}{5}x_1^5 + \frac{c_1}{3}x_1^3 + \frac{c_2}{2}x_1^2 + c_3 x_1 + (M)$,

fluturele: $\pm\left(\frac{1}{6}x_1^6 + \frac{c_1}{4}x_1^4 + \frac{c_2}{3}x_1^3 + \frac{c_3}{2}x_1^2 + c_4 x_1\right) + (M)$.

3) *catastrofe ombilicale*:
ombilicul eliptic:

$$x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + c_1(x_1^2 + x_2^2) + c_2x_1 + c_3x_2 + (N),$$

ombilicul hiperbolic:

$$x_1 + x_2^3 + c_1x_1x_2 + c_2x_1 + c_3x_2 + (N),$$

ombilicul parabolic:

$$\pm (x_1^2x_2 + x_2^4 + c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_1 + c_4x_2) + (N),$$

unde $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(c_1,\ldots,c_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \leqslant 4$, (M) indică o funcţie (Morse) de forma

$$x_2^2 + \ldots + x_l^2 - x_{l+1}^2 - \ldots - x_n^2 \quad (1 \leqslant l \leqslant n),$$

iar (N) indică o funcţie (Morse) de forma

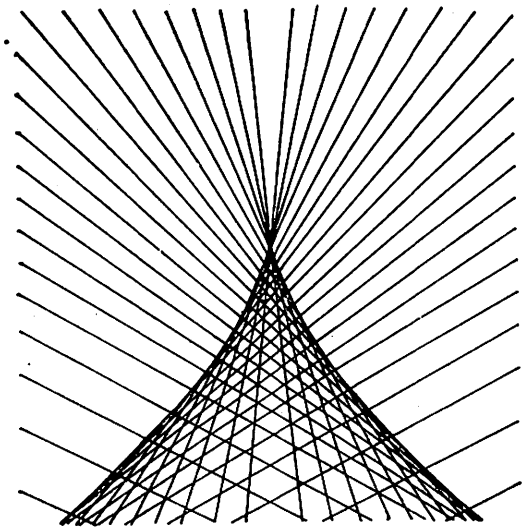
$$x_3^2 + \ldots + x_l^2 - x_{l+1}^2 - \ldots - x_n^2 \quad (2 \leqslant l \leqslant n).$$

Denumirile respective au fost sugerate de geometriile caracteristice fiecărui tip în parte şi se folosesc atît pentru familia de funcţii, cît şi pentru punctele critice corespunzătoare. Semnele $\pm$ indică posibilităţi duale şi în continuare vor fi lăsate de o parte întrucît geometria celor două situaţii este esenţial aceeaşi. Lăsînd de o parte şi formele (1) şi termenii (M), respectiv (N), obţinem şapte tipuri de familii de funcţii numite pe scurt *catastrofe elementare*. Acestea conţin *subcatastrofe*, diagrama de subordonare fiind următoarea:

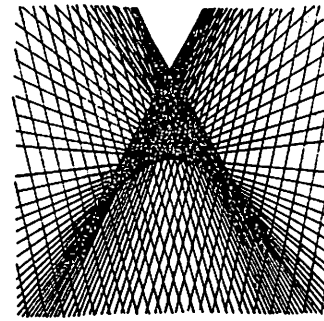
$$\begin{tikzcd}
\textit{fluture} \arrow[r] & \textit{rîndunică} \arrow[r] & \textit{întoarcere} \arrow[r] & \textit{fald} \arrow[r] & (\textit{Morse}) \\
\textit{ombilic parabolic} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \textit{ombilic eliptic} \arrow[u] & & & \\
& \textit{ombilic hiperbolic} \arrow[uur] & & &
\end{tikzcd}$$

O subvarietate diferenţiabilă a lui $\mathbb{R}^p$, de dimensiune q, care poate fi generată prin mişcarea unei drepte care se sprijină pe o subvarietate de dimensiune $r \leqslant q - 1$, se numeşte *varietate riglată*. Avînd în vedere harta standard a cărei imagine este o dreaptă, rezultă că o varietate riglată poate fi parametrizată întotdeauna sub forma $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{u}) + v\psi(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in D \subset \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$.

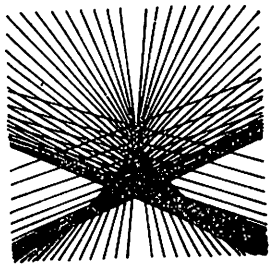
Graficele funcţiilor standard precum şi varietăţile catastrofă corespunzătoare sînt varietăţi diferenţiabile riglate. De aceea geometriile lor sînt cazuri particulare ale teoriei generale a varietăţilor riglate, noţiunile din teoria catastrofelor regăsindu-se în noţiuni de geometrie diferenţială. Acest lucru a uşurat trasarea cu calculatorul a unor desene [35] care conţin proiecţii ale varietăţii catastrofă în spaţiul de control punînd într-o nouă lumină legătura dintre mulţimea bifurcaţie şi varietatea catastrofă: fig. 4.1, a — *întoarcerea*, b — *rîndunica*, c — *fluturele*, d — *ombilicul eliptic*, e — *ombilicul hiperbolic*, f — *ombilicul parabolic*.



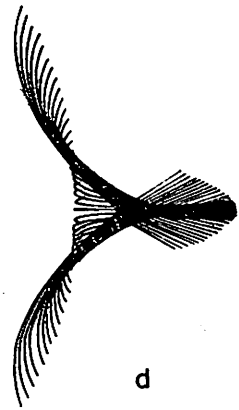
a



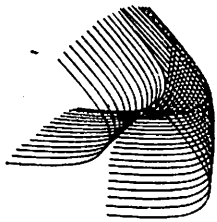
b



c



d



e

f

Fig. 4.1

Geometria catastrofelor elementare va fi prezentată în cele ce urmează ca o variantă a teoriei extremelor.

4.2. Faldul

Funcţia f este definită pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prin

$$f(x, a) = \frac{1}{3} x^3 + ax,$$

factorul 1/3 fiind introdus din motive de calcul. Graficul lui f este o suprafaţă riglată în $\mathbb{R}^3$, fiind imaginea lui $\mathbb{R}^2$ prin harta proprie $x = u$, $a = v$, $z = \frac{1}{3}u^3 + vu$ (fig. 4.2). Secţionînd această suprafaţă cu plane paralele cu planele de coordonate, obţinem curbe care au respectiv alura din fig. 4.3 — 4.5.

Potenţialul este funcţia parţială $x \to f_a(x) = \frac{1}{3} x^3 + ax$ (fig. 4.4). *Varietatea catastrofă* are ecuaţia $\frac{d}{dx} f_a(x) = 0$, adică $M: x^2 + a = 0$. Evident M este parabolă (fig. 4.6) şi mai poate fi privită ca imaginea hărţii $\alpha: x = t$, $a = -t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Expresia în coordonate a aplicaţiei catastrofă este $\chi \circ \alpha(t) = -t^2$. Aceasta are un singur punct critic $t = 0$. De aceea χ are punctul critic (0,0) şi deci mulţimea singularităţilor este $S = \{(0,0)\}$. Rezultă *mulţimea bifurcaţie* $B = \chi(\{(0,0)\}) = \{0\}$ (fig. 4.6).

Pe de altă parte, $\frac{d^2}{dx^2} f_a(x) = 2x$, deci pentru funcţia $x \to f_a(x)$ sînt adevărate afirmaţiile: $x = -\sqrt{-a} < 0$ este un punct de maxim, $x = 0$ este un punct critic degenerat (punct de inflexiune), iar $x = \sqrt{-a} > 0$ este un punct de minim (fig. 4.4).

Se observă că *linia de stricţiune* a graficului lui f are ecuaţiile parametrice $x = u$, $a = -u^2$, $z = -\frac{2}{3}u^3$, $u \in \mathbb{R}$. Proiecţia liniei de stricţiune pe planul xOa este varietatea catastrofă, iar proiecţia ei pe axa Oa este imaginea aplicaţiei catastrofă.

4.3. Întoarcerea

Fie funcţia $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de valori

$$f(x, a, b) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ax^2 + bx.$$

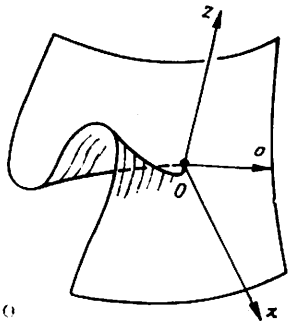


Fig. 4.2

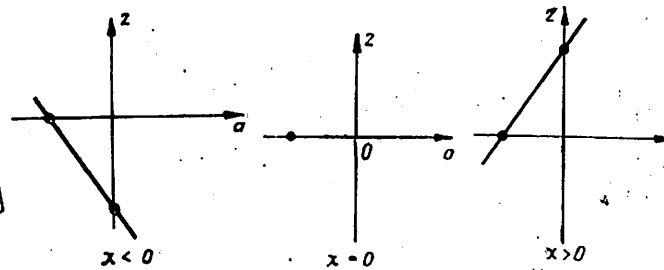


Fig. 4.3

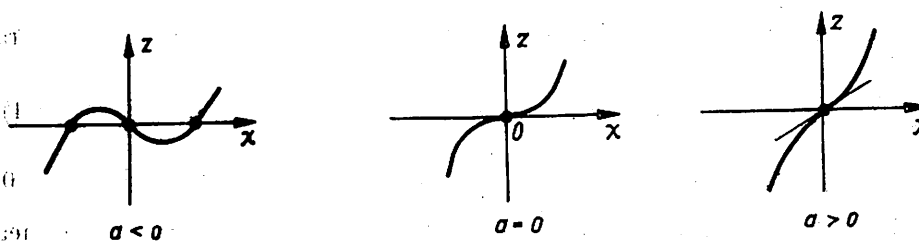


Fig. 4.4

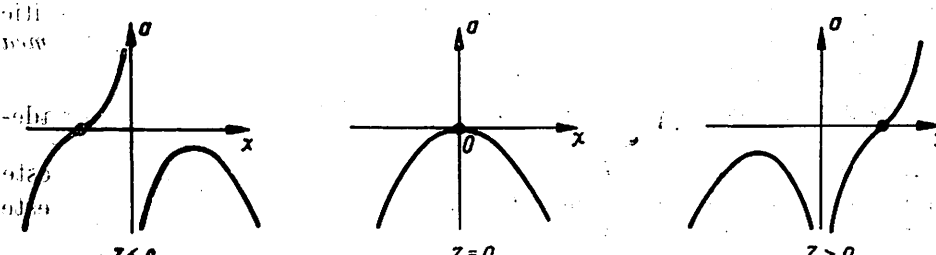


Fig. 4.5

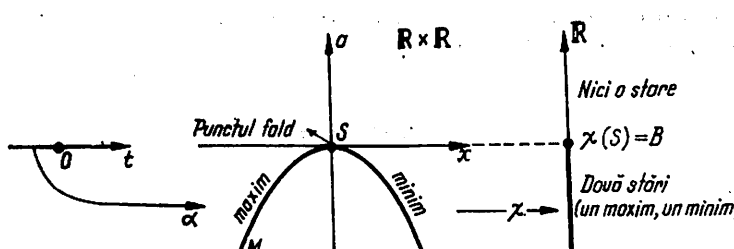


Fig. 4.6

Graficul lui f este o hipersuprafață riglată în $\mathbb{R}^4$, fiind imaginea hărții $x = u$, $a = v$, $b = w$, $z = \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} v u^2 + w u$, $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

Potențialul este funcția parțială $x \to f_{ab}(x) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} a x^2 + b x$. Deoarece $\frac{d}{dx} f_{ab}(x) = x^3 + a x + b$, punctele critice ale lui f_{ab} sînt soluțiile ecuației $x^3 + a x + b = 0$. Se știe însă că natura rădăcinilor unei asemenea ecuații este determinată de semnul discriminantului $D = 4a^3 + 27 b^2$: dacă $D < 0$, adică (a, b) aparține regiunii I din fig. 4.7, atunci există trei rădăcini reale; pentru $D = 0$, dar $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, adică pentru $(a, b) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, ecuația în x are trei rădăcini reale, una fiind dublă (corespunzător lui Γ_1, cea dublă este cea mai mică; corespunzător lui Γ_2 cea dublă este cea mai mare); dacă $D = 0$ și $a = b = 0$, atunci $x = 0$ este o rădăcină reală triplă; pentru $D > 0$, adică pentru (a, b) aparținînd regiunii II din fig. 4.7 ecuația în x are o rădăcină reală și două rădăcini complex conjugate. Ținînd seama de $\frac{d^2}{dx^2} f_{ab}(x) = 3x^2 + a$, punctele critice sînt nedegenerate cu excepția cazului $a = b = 0$ în care $x = 0$ este un punct critic degenerat. Dacă ținem seama de semnele derivatelor de ordinul unu și doi, respectiv, ajungem la următoarele concluzii: pentru (a, b) din regiunea I, fig. 4.7, funcția f_{ab} are un maxim local între două minime globale; pentru $(a, b) \in \Gamma_1$ funcția f_{ab} are un punct de inflexiune la stînga unui punct de minim global; pentru $(a, b) \in \Gamma_2$ funcția f_{ab} are un punct de inflexiune la dreapta unui punct de minim global; dacă $a = b = 0$, atunci $x = 0$ este un punct de minim global pentru f_{00}; dacă (a, b) aparține regiunii II din fig. 4.7, atunci f_{ab} are un minim global. Graficele corespunzătoare pentru $x \to f_{ab}(x)$ sînt schițate în fig. 4.8.

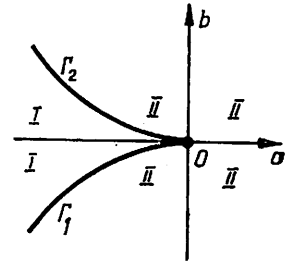


Fig. 4.7

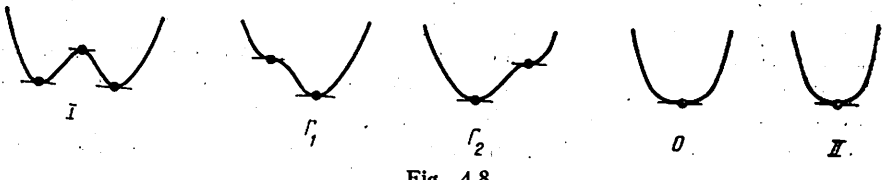


Fig. 4.8

Varietatea catastrofă are ecuația $\frac{d}{dx} f_{ab}(x) = 0$, adică $M: x^3 + a x + b = 0$. Aceasta nu este altceva decît imaginea hărții $\mathbf{r}: x = u$, $a = v$, $b = -u^3 - v u$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Astfel M este o suprafață riglată în $\mathbb{R}^3$ (fig. 4.9).

Expresia în coordonate a aplicației catastrofă este $\chi \circ \mathbf{r}(u, v) = (v, -u^3 - vu)$ căreia i se atașază matricea jacobian $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3u^2v & -u \end{bmatrix}$. Deoarece determinantul acestei matrice este $3u^2 + v$, rezultă că punctele parabolei $P: 3u^2 + v = 0$ din planul uOv sînt punctele singulare ale lui $\chi \circ \mathbf{r}$. Astfel, *mulțimea singularităților* S este caracterizată prin $x = u$,

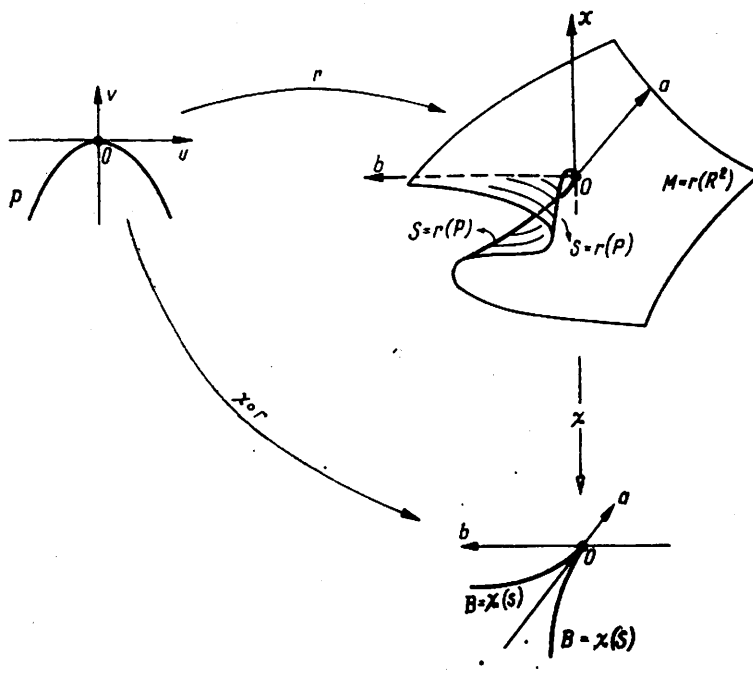


Fig. 4.9

$a = v$, $b = -u^3 - vu$, $3u^2 + v = 0$, adică S este o cubică răsucită (*curba fald*) de ecuații parametrice $x = u$, $a = -3u^2$, $b = 2u^3$. Corespunzător, *mulțimea bifurcație* B are parametrizarea $\chi(u, -3u^2, 2u^3) = (-3u^2, 2u^3)$. Cu alte cuvinte, B este parabola semicubică de ecuație carteziană implicită $4a^3 + 27b^2 = 0$ (fig. 4.7 și 4.9). Pentru această curbă originea este un punct de întoarcere (punct singular) de speța întîi.

Urma graficului lui f în hiperplanul $a = \text{const}$ este o suprafață riglată de ecuații parametrice $x = u$, $b = w$, $z = \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}au^2 + wu$. *Linia de strictiune* a acestei suprafețe are ecuațiile $x = u$, $b = -u^3 - au$, $z = -\frac{3}{4}u^4 - \frac{a}{2}u^2$. Lăsînd pe a variabil, obținem o familie de curbe a căror proiecție pe $Oxab$ este varietatea catastrofă.

Linia de stricţiune a varietăţii catastrofă este $x = u$, $a = -3u^2$, $b = 2u^3$. Proiecţia acesteia pe aOb este mulţimea bifurcaţie.

4.4. Rîndunica

Se consideră $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cu valorile

$$f(x, a, b, c) = \frac{1}{5} x^5 + \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx.$$

Graficul său este o hipersuprafaţă (varietate de dimensiune 4) riglată în $\mathbb{R}^5$. Această afirmaţie devine evidentă dacă privim acest grafic ca imaginea hărţii.

$$(x, a, b, c) \to \left(x, a, b, c, \frac{1}{5} x^5 + \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx\right).$$

Fie *familia de potenţiale* $x \to f_{abc}(x) = \frac{1}{5} x^5 + \frac{a}{3} x^3 + \frac{bx^2}{2} + cx.$

Deoarece

$$\frac{d}{dx} f_{abc}(x) = x^4 + ax^2 + bx + c, \quad \frac{d^2}{dx^2} f_{abc}(x) = 4x^3 + 2ax + b,$$

graficul lui $x \to \frac{d}{dx} f_{abc}(x)$ are alura din fig. 4.8.

Varietatea catastrofă are ecuaţia carteziană implicită $\frac{d}{dx} f_{abc}(x) = 0$, adică $M: x^4 + ax^2 + bx + c = 0$. Ea poate fi privită ca fiind imaginea hărţii $\mathbf{r}: x = u$, $a = v$, $b = w$, $c = -u^4 - vu^2 - wu$, $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, lucru ce pune în evidenţă faptul că M este o hipersuprafaţă (varietate cu dimensiunea 3) riglată în $\mathbb{R}^4$.

Fie χ *aplicaţia catastrofă*. Funcţia $\chi \circ \mathbf{r}$ este definită prin $\chi \circ \mathbf{r}(u, v, w) = (v, w, -u^4 - vu^2 - wu)$. Matricea jacobian ataşată lui $\chi \circ \mathbf{r}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4u^3 - 3vu - w & -u^2 & -u \end{bmatrix},$$

are determinantul $-(4u^3 + 2vu + w)$. Aceasta pune în evidenţă că punctele suprafeţei (varietate cu două dimensiuni) riglate $\Sigma: 4u^3 + 2vu + w = 0$ din spaţiul $Ouvw$ sînt punctele singulare ale lui $\chi \circ \mathbf{r}$. Alura lui Σ este aceeaşi cu alura varietăţii catastrofă din fig. 4.9. Rezultă că *mulţimea*

singularităților S are ecuațiile $x = u$, $a = v$, $b = w$, $c = -u^4 - vu^2 - wu$, $4u^3 + 2vu + w = 0$, adică S este suprafața (varietate cu dimensiune 2) riglată în $\mathbb{R}^4$ de ecuații parametrice $x = u, a = v, b = -4u^3 - 2vu, c = 3u^4 + vu^2$.

Mulțimea bifurcație B este imaginea aplicației $a = v$, $b = -4u^3 - 2vu$, $c = 3u^4 + vu^2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Deoarece rangul matricei jacobian atașate acestei aplicații este 1 dacă și numai dacă $u^2 + v = 0$, în rest rangul fiind doi, rezultă că $(-6u^2, 8u^3, -3u^4)$, $u \in$, sînt puncte singulare ale lui B, iar $B \setminus \{(-6u^2, 8u^3, -3u^4), u \in \mathbb{R}\}$ este o suprafață (varietate cu două dimensiuni) în $\mathbb{R}^3$. De asemenea, se observă că $B \setminus \{(-6u^2, 8u^3, -3u^4), u \in \mathbb{R}\}$ este o suprafață riglată.

Urma graficului lui f în $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ este suprafața riglată,

$$(x, c) \to \left(x, c, \frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right).$$

Linia de strictiune a acestei suprafețe este

$$x \to \left(x, -x^4 - ax^2 - bx, -\frac{4}{5}x^5 - \frac{2a}{3}x^3 - \frac{b}{2}x^2\right).$$

Considerînd (a, b) variabil, obținem o familie de curbe a căror proiecție pe $Oxybc$ este varietatea catastrofă. Urma varietății catastrofă în hiperplanul $a = \text{const}$ este suprafața riglată

$$(x, b) \to (x, b, -x^4 - ax^2 - bx),$$

iar aceasta are linia de strictiune

$$x \to (x, -4x^3 - 2ax, 3x^4 + ax^2).$$

Proiecția pe $Oabc$ a familiei acestor curbe este mulțimea bifurcație.

4.5. Fluturele

Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, a, b, c, d) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx.$$

Graficul acestei funcții este o hipersuprafață (varietate de dimensiune 5) în $\mathbb{R}^6$.

Considerăm *familia de potențiale*

$$x \to f_{abcd}(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx.$$

Varietatea catastrofă are ecuaţia carteziană implicită

$$M : x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

fiind o hipersuprafaţă (varietate cu patru dimensiuni) riglată în $\mathbb{R}^5$.

Fie $(x, y, b, c) \xrightarrow{r} (x, y, b, c, -x^5 - ax^3 - bx^2 - cx)$ o hartă a cărei imagine acoperă pe M. Dacă χ este *aplicaţia catastrofă*, atunci funcţia $\chi \circ \mathbf{r}$ este definită prin

$$\chi \circ \mathbf{r}\ (x, y, b, c) = (a, b, c, -x^5 - ax^3 - bx^2 - cx).$$

Aceasta are jacobianul

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5x^4 - 3ax^2 - 2bx - c & -x^3 & -x^2 & -x \end{vmatrix} = 5x^4 + 3ax^2 + 2bx + c.$$

De aceea punctele hipersuprafeţei (varietate cu trei dimensiuni în $\mathbb{R}^4$) riglate de ecuaţie carteziană implicită $5x^4 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$ sînt punctele singulare ale lui $\chi \circ \mathbf{r}$. Rezultă că ecuaţiile carteziene implicite ale lui S sînt $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $5x^4 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$ şi deci S este o varietate riglată cu trei dimensiuni în $\mathbb{R}^5$.

Mulţimea bifurcaţie B este caracterizată prin ecuaţiile carteziene explicite $c = -5x^4 - 3ax^2 - 2bx$, $d = 4x^5 + 2ax^3 + bx^2$. Pe de altă parte, aplicaţiei $(x, y, b) \to (c, d)$ i se ataşază matricea jacobian

$$J = \begin{bmatrix} -20x^4 - 6ax^2 - 2b & -3x^2 & -2x \\ 20x^4 + 6ax^2 + 2bx & 2x^3 & x^2 \end{bmatrix},$$

avînd $\operatorname{rang} J = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x = 0 \text{ şi } b = 0, \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \text{ şi } b \neq 0, \\ 2 & \text{pentru } x \neq 0 \text{ şi } b \text{ oarecare,} \end{cases}$

Rezultă că elementele mulţimii $\{(a, b, 0, 0) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ sînt puncte singulare ale lui B, iar $B \setminus \{(a, b, 0, 0) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ este o varietate cu trei dimensiuni în $\mathbb{R}^4$ (hipersuprafaţă riglată).

4.6. Ombilicul eliptic

Fie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avînd valorile

$$f(x, y, a, b, c) = x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy.$$

Graficul lui f este o hipersuprafaţă (varietate de dimensiune 5) în $\mathbb{R}^6$. Acest grafic este acoperit de imaginea hărţii

$$(x, y, a, b, c) \to (x, y, a, b, c, x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy),$$

lucru ce pune în evidenţă că acesta este o varietate riglată.

Considerăm funcţia parţială

$$(x, y) \to f_{abc}(x, y) = x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy.$$

Punctele critice ale acestei funcţii sînt soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f_{abc}}{\partial x}(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial f_{abc}}{\partial y}(x, y) = 0,$$

adică

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - y^2 - \frac{a^2 - 3b}{9} = 0, \; -6xy + 2ay + c = 0.$$

Pentru $a > 0$, prima dintre aceste ecuaţii reprezintă familia de hiperbole din fig. 4.10, iar a doua reprezintă familia de hiperbole din fig. 4.11. Intersecţiile dintre aceste două familii de hiperbole sînt punctele critice ale lui f_{abc}. Prin calcul direct găsim hessiana

$$\frac{1}{2} d^2 f_{abc}(x, y) = (a + 3x)\, dx^2 - 6y\, dx\, dy + (a - 3x)\, dy^2.$$

Acesteia îi ataşăm determinanţii

$$\Delta_1 = a + 3x, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a + 3x & -3y \\ -3y & a - 3x \end{vmatrix} = a^2 - 9(x^2 + y^2).$$

Punctele critice ale lui f_{abc} pentru care $\Delta_2 \neq 0$ sînt puncte critice nedegenerate: pentru $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ hessiana $d^2 f_{abc}$ este pozitiv definită şi deci punctele critice sînt puncte de minim (interiorul discului din fig. 4.12, cazul $a > 0$); pentru $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ hessiana $d^2 f_{abc}$ este negativ definită şi deci punctele critice sînt puncte de maxim (interiorul discului din fig. 4.12, cazul $a < 0$); în cazul $\Delta_2 < 0$ hessiana $d^2 f_{abc}$ nu păstrează semn constant şi, în consecinţă, punctele critice nu sînt puncte de extrem (exteriorul discului din fig. 4.12). Dacă $\Delta_2 = a^2 - 9(x^2 + y^2) = 0$ (cercul din fig. 4.12), atunci $d^2 f_{abc}$ este semidefinită pe porţiuni, iar punctele critice ale lui f_{abc} sînt puncte critice degenerate. În acest caz, pe direcţia $\frac{dx}{dy} = \frac{3y}{a + 3x}$, $a + 3x \neq 0$, pe care $d^2 f_{abc}$ este degenerată, facem apel la restricţia lui

$$\frac{1}{6} d^3 f_{abc}(x, y) = (dx^2 - 3dy^2)\, dx.$$

Semnul acestei restricţii determină tipul punctelor critice, excepţie făcînd cazul $\frac{1}{3}\,\mathrm{d}^3 f_{abc}(x, y) = (\mathrm{d}x^2 - 3\mathrm{d}y^2)\,\mathrm{d}x = 0$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{3y}{a + 3x}$, $a + 3x \neq 0$, $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{9}$, $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$ căruia îi corespund trei puncte $x = \frac{a}{3}$, $y = 0$ şi $x = -\frac{a}{6}$, $y = \pm\frac{a\sqrt{3}}{6}$ care în fig. 4.12 sînt reprezentate respectiv prin semnele $\odot$. Aceste puncte sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Fie *familia de potenţiale* $(x, y) \to f_{abc}(x, y)$. *Varietatea catastrofă* are ecuaţiile carteziene implicite $\frac{\partial}{\partial x} f_{abc}(x, y) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} f_{abc}(x, y) = 0$, adică M: $3(x^2 - y^2) + 2ax + b = 0$, $-6xy + 2ay + c = 0$. Se observă că M este acoperită în întregime de imaginea hărţii $(x, y, a) \xrightarrow{\mathbf{r}} (x, y, a, 3(y^2 - x^2) - 2ax, 6xy - 2ay)$ şi deci M este o varietate riglată de dimensiune 3 în $\mathbb{R}^5$.

Notăm prin χ aplicaţia catastrofă. Atunci funcţia $\chi \circ \mathbf{r}$ este definită prin $\chi \circ \mathbf{r}(x, y, a) = (a, 3(y^2 - x^2) - 2ax, 6xy - 2ay)$. Acesteia i se ataşază jacobianul

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6x-2a & 6y & -2x \\ 6y & 6x - 2a & -2y \end{vmatrix} = 4[a^2 - 9(x^2 + y^2)].$$

Astfel punctele „suprafeţei" conice $\Sigma : x^2 + y^2 = \frac{a^2}{9}$ (fig. 4.13) sînt punctele singulare ale lui $\chi \circ \mathbf{r}$. Celor trei puncte $x = \frac{a}{3}$, $y = 0$ şi $x = -\frac{a}{6}$, $y = \pm\frac{a\sqrt{3}}{6}$ din fig. 4.12 le corespund trei drepte pe „suprafaţa" conică şi anume $a \to \left(\frac{a}{3}, 0, a\right)$, $\left(-\frac{a}{6}, \pm\frac{a\sqrt{3}}{6}, a\right)$, două cîte două determinînd unghiuri egale. Corespunzător avem următoarele tipuri de puncte critice (fig. 4.13): pentru cele trei drepte găsim întoarceri şi întoarceri duale, pentru vîrful conului (originea) ombilicul eliptic este un punct şa maimuţă, restului suprafeţei conice îi corespund puncte fald, iar celorlalte puncte ale spaţiului le corespund puncte critice nedegenerate (puncte de minim, de maxim şi puncte şa).

Mulţimea S a singularităţilor lui χ are ecuaţiile carteziene implicite $3(x^2 - y^2) + 2ax + b = 0$, $-6xy + 2ay + c = 0$, $x^2 + y^2 = a^2/9$. Se

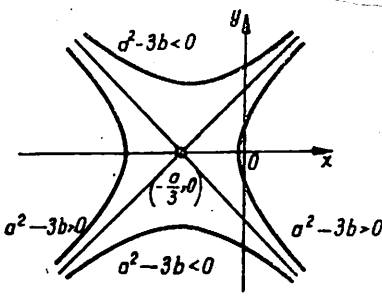


Fig. 4.10

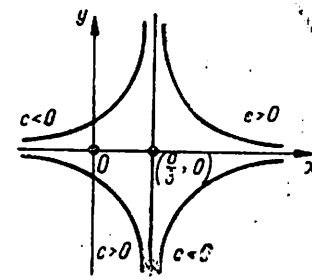


Fig. 4.11

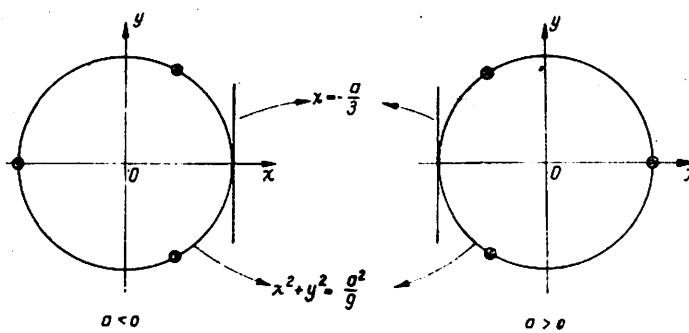


Fig. 4.12

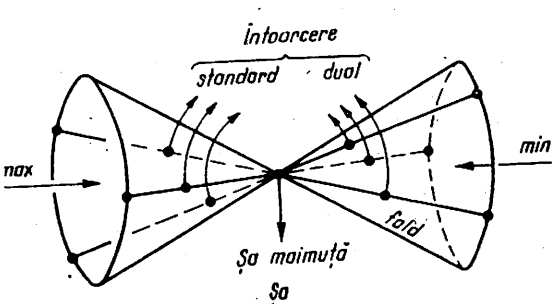


Fig. 4.13

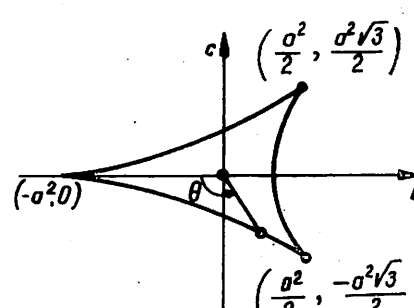


Fig. 4.14

servă că aplicației $(x, y, a, b, c) \to (3(x^2-y^2)+2ax+b, -6xy+2ay+c, x^2+y^2-a^2/9)$ îi corespunde matricea jacobian

$$\begin{bmatrix} 6x+2a & -6y & 2x & 1 & 0 \\ -6y & -6x+2a & 2y & 0 & 1 \\ 2x & 2y & -2a/9 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

iar aceasta are peste tot rangul trei cu excepția punctului (0,0,0,0,0) în care are rangul doi. De aceea $S \setminus \{(0,0,0,0,0)\}$ este o varietate diferențiabilă de dimensiune doi în $\mathbb{R}^5$.

Imaginile în M ale dreptelor $a \to \left(\frac{a}{3}, 0, a\right), \left(-\frac{a}{6}, \pm\frac{a\sqrt{3}}{6}, a\right)$ sînt curbele Γ_i, $i = 1, 2, 3$:

$$a \to \left(\frac{a}{3}, 0, a, -a^2, 0\right), \left(-\frac{a}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, a, \frac{a^2}{2}, -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\left(-\frac{a}{6}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, a, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right).$$

Să privim acum „suprafața" conică $\Sigma : x^2+y^2 = a^2/9$ ca fiind imaginea aplicației $(a, \theta) \to \left(\frac{a}{3}\cos\theta, \frac{a}{3}\sin\theta, a\right)$, $(a, \theta) \in \mathbb{R}^2$. Atunci *mulțimea bifurcație* B este caracterizată prin ecuațiile $b = -\frac{a^2}{3}(\cos 2\theta + 2\cos\theta)$, $c = \frac{a^2}{3}(\sin 2\theta - 2\sin\theta)$. Jacobianul atașat aplicației $(a, \theta) \to (b, c)$ are expresia

$$\begin{vmatrix} -\frac{2a}{3}(\cos 2\theta + 2\cos\theta) & -\frac{a^2}{3}(-2\sin 2\theta - 2\sin\theta) \\ \frac{2a}{3}(\sin 2\theta - 2\sin\theta) & \frac{a^2}{3}(2\cos 2\theta - 2\cos\theta) \end{vmatrix} = \frac{4a^3}{9}(1-\cos 3\theta).$$

De aceea punctele pentru care $a = 0$ (originea) sau $\cos 3\theta = 1$, adică $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ sînt puncte singulare ale lui B. Restul mulțimii B este o suprafață în $\mathbb{R}^3$. Se observă că $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ sînt trei parabole congruente din B,

$$(a, b, c) = (a, -a^2, 0), \left(a, \frac{a^2}{2}, \frac{-a^2\sqrt{3}}{6}\right), \left(a, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$$

situate în plane ce fac între ele unghiuri de 120°. Acestea nu sînt altceva decît proiecțiile curbelor Γ_1, Γ_2 și Γ_3. Secțiunile lui B prin plane $a =$ $=$ const au aceeași dependență față de θ, fiind hipocicloide omotetice cu trei puncte de întoarcere (fig. 4.14).

4.7. Ombilicul hiperbolic

Funcţia standard $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$f(x, y, a, b, c) = x^3 + y^3 + axy + bx + cy,$$

iar graficul lui f este o hipersuprafaţă (varietate de dimensiune 5) riglată în $\mathbb{R}^6$. Acest grafic este acoperit în întregime de imaginea hărţii

$$(x,y,a,b,c) \to (x,y,a,b,c,x^3 + y^3 + axy + bx + cy).$$

Fie funcţia parţială

$$(x, y) \to f_{abc}(x, y) = x^3 + y^3 + axy + bx + cy.$$

Punctele critice ale lui f_{abc} sînt soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f_{abc}}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + ay + b = 0, \quad \frac{\partial f_{abc}}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + ax + c = 0.$$

Aceste ecuaţii reprezintă respectiv familii de parabole; prima reprezintă parabole cu axa paralelă cu Oy, a doua parabole cu axa paralelă cu Ox. Hessiana ataşată lui f_{abc} are expresia

$$\frac{1}{2} d^2 f_{abc}(x, y) = 3x\, dx^2 + a\, dx\, dy + 3y\, dy^2.$$

Notăm

$$\Delta_1 = 3x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3x & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 3y \end{vmatrix} = 9xy - \frac{a^2}{4}.$$

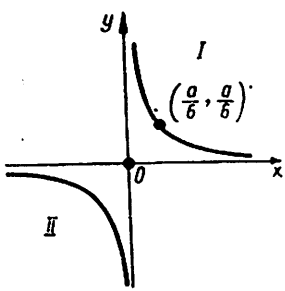


Fig. 4.15

Punctele critice ale lui f_{abc} în care $\Delta_2 \neq 0$ sînt nedegenerate: dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, atunci hessiana $d^2 f_{abc}$ este pozitiv definită şi corespunzător punctele critice sînt puncte de minim (regiunea I din fig. 4.15); dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, atunci $d^2 f_{abc}$ este negativ definită şi deci punctele critice sînt puncte de maxim (regiunea II din fig. 4.15); dacă $\Delta_2 < 0$, atunci $d^2 f_{abc}$ nu păstrează semn constant şi, prin urmare, punctele critice nu sînt puncte de extrem local (regiunea din plan cuprinsă între cele două ramuri ale hiperbolei din fig. 4.15).

Fie $\Delta_2 = 9xy - \frac{a^2}{4} = 0$ (hiperbola din fig. 4.15). Atunci $d^2 f_{abc}$ este semidefinită pe porţiuni, iar punctele critice ale lui f_{abc} situate pe hiper-

duală sînt degenerate. Direcţia pe care d^2f_{abc} este degenerată este $\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{6x}$, $x \neq 0$. Semnul restricţiei lui $\frac{1}{6}\, d^3f = dx^3 + dy^3$ la această direcţie determină tipul punctelor critice, excepţie făcînd cazul $dx^3 + dy^3 = 0$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{6x}$, $x \neq 0$, $xy = \frac{a^2}{36}$, $xdx + ydy = 0$, adică punctul $x = y = a/6$.

Considerînd familia de potenţiale $(x, y) \to f_{abc}(x, y)$, *varietatea catastrofă* are ecuaţiile carteziene implicite

$$M:\ 3x^2 + ay + b = 0,\ 3y^2 + ax + c = 0.$$

Aceasta este o varietate riglată de dimensiune 3 în $\mathbb{R}^5$ care este acoperită în întregime de imaginea hărţii

$$(x, y, a) \xrightarrow{\mathbf{r}} (x, y, a, -3x^2 - ay, -3y^2 - ax).$$

Fie χ *aplicaţia catastrofă*. Jacobianul lui $\chi \circ \mathbf{r}$ are expresia

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6x & -a & -y \\ -a & -6y & -x \end{vmatrix} = 36xy - a^2.$$

Astfel mulţimea punctelor singulare ale lui $\chi \circ \mathbf{r}$ este suprafaţa conică Σ: $36xy = a^2$. Punctului $(a/6, a/6)$ din fig. 4.15 îi corespunde dreapta $(x, y, a) = (a/6, a/6, a)$ situată pe Σ. Punctele critice ale lui f_{abc} corespunzătoare acestei drepte sînt de tip întoarcere şi întoarcere dublă, punctele critice corespunzătoare restului conului Σ sînt de tipul fald, iar punctele critice corespunzătoare interiorul sau exteriorul conului sînt nedegenerate (puncte de minim, de maxim şi puncte şa) (fig. 4.16).

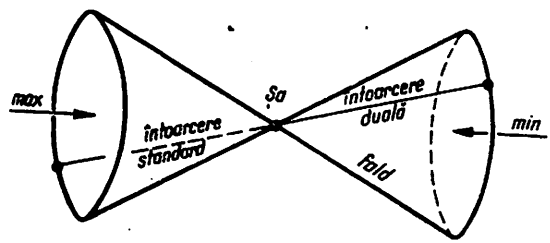


Fig. 4.16

Mulţimea singularităţilor lui χ are ecuaţiile carteziene implicite S: $3x^2 + ay + b = 0$, $3y^2 + ax + c = 0$, $36\,xy = a^2$. De aceea, ţinînd seama că matricea jacobian

$$\begin{bmatrix} 6x & a & y & 1 & 0 \\ a & 6y & x & 0 & 1 \\ 36y & 36x & -2a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ataşată aplicaţiei $(x, y, a, b, c) \to (3x^2 + ay + b, 3y^2 + ax + c, 36xy - a^2)$ are peste tot rangul trei cu excepţia punctului (0,0,0,0,0) în care are

rangul doi, rezultă că $S \setminus \{(0,0,0,0,0)\}$ este o varietate diferenţiabilă de dimensiune doi în $\mathbb{R}^5$.

Imaginea în M a dreptei $(x, y, a) = (a/6, a/6, a)$ este curba $(x, y, a, b, c) = (a/6, a/6, a, -a^2/4, -a^2/4)$.

„Suprafaţa" conică $\Sigma : 36xy = a^2$ mai poate fi privită ca fiind imaginea aplicaţiei

$$(x, y, a) = \begin{cases} \left(\frac{a}{6} e^{\theta}, \frac{a}{6} e^{-\theta}, a\right) & \text{pentru } a \neq 0, \ \theta \in \mathbb{R}, \\ (0, \ln(-\theta), 0) & \text{pentru } a = 0, \ \theta < 0, \\ (0, 0, 0) & \text{pentru } a = 0, \ \theta = 0, \\ (\ln\theta, 0, 0) & \text{pentru } a = 0, \ \theta > 0. \end{cases}$$

Mulţimea bifurcaţie B are ecuaţiile

$$b = \begin{cases} -\frac{a^2}{12}(e^{2\theta} + 2e^{-\theta}) & \text{pentru } a \neq 0, \ \theta \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{pentru } a = 0, \ \theta \leqslant 0, \\ -3 \ln^2\theta & \text{pentru } a = 0, \ \theta > 0. \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} -\frac{a^2}{12}(e^{-2\theta} + 2e^{\theta}) & \text{pentru } a \neq 0, \ \theta \in \mathbb{R}, \\ -3\ln^2(-\theta) & \text{pentru } a = 0, \ \theta < 0, \\ 0 & \text{pentru } a = 0, \ \theta \geqslant 0. \end{cases}$$

Jacobianul ataşat restricţiei $(a, \theta) \to (b, c)$, $a \neq 0$, are expresia

$$\begin{vmatrix} -\frac{a}{6}(e^{2\theta} + 2e^{-\theta}) & -\frac{a^2}{12}(2e^{2\theta} - 2e^{-\theta}) \\ -\frac{a}{6}(e^{-2\theta} + 2e^{\theta}) & -\frac{a^2}{12}(-2e^{-2\theta} + 2e^{\theta}) \end{vmatrix} = \frac{a^2}{18}(1 - \operatorname{ch} 3\theta)$$

şi deci punctele pentru care $\theta = 0$, adică punctele parabolei $(a, b, c) = (a, -a^2/4, -a^2/4)$ sînt puncte singulare ale lui B. Tot puncte singulare sînt şi punctele pentru care $a = 0$, deoarece b şi c nu sînt diferenţiabile în punctele $(0, \theta)$. Restul mulţimii B este o suprafaţă în $\mathbb{R}^3$. Secţionînd pe B prin plane $a = \text{const} \neq 0$, găsim curbe omotetice care au un punct de întoarcere corespunzător lui $\theta = 0$. Secţiunea lui B prin planul $a = 0$ este reuniunea semiaxelor negative.

4.8. Ombilicul parabolic

Fie funcţia $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ avînd valorile

$$f(x, y, a, b, c, d) = x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy.$$

Graficul lui f este o hipersuprafaţă (varietate de dimensiune 6) riglată în $\mathbb{R}^7$, fiind în întregime acoperit de imaginea hărţii $(x, y, a, b, c, d) \to$ $\to (x, y, a, b, c, d, x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy)$.

Fie funcţia parţială $(x, y) \to f_{abcd}(x, y) = x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$. Soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f_{abcd}}{\partial x}(x, y) = 2xy + 2ax + c = 0, \frac{\partial f_{abcd}}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + x^2 + 2by + d = 0$$

sînt punctele critice ale lui f_{abcd}. Hessiana lui f_{abcd} este

$$\frac{1}{2} d^2 f_{abcd}(x, y) = (y + a)\, dx^2 + 2x\, dx\, dy + (6y^2 + b)\, dy^2.$$

Acesteia îi ataşăm determinanţii

$$\Delta_1 = y + a, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} y + a & x \\ x & 6y^2 + b \end{vmatrix} = 6y^3 + 6ay^2 + by + ab - x^2.$$

Pentru $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ hessiana $d^2 f_{abcd}$ este pozitiv definită şi punctele critice corespunzătoare sînt puncte de minim; pentru $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ hessiana este negativ definită şi punctele critice în care se întîmplă acest lucru sînt puncte de maxim; dacă $\Delta_2 < 0$, atunci hessiana nu păstrează semn constant şi punctele critice corespunzătoare nu sînt puncte de extrem. Toate aceste puncte critice sînt nedegenerate. Presupunem $\Delta_2 = 6y^3 + 6ay^2 + by + ab - x^2 = 0$. Pe această curbă, hessiana este semidefinită (pe porţiuni), iar punctele critice ale lui f_{abcd} situate aici sînt puncte critice degenerate. Direcţia de degenerare a lui $d^2 f_{abcd}$ este dată de $(y + a)\, dx = -x dy$. Semnul restricţiei lui $\frac{1}{6} d^3 f_{abcd} = (dx^2 + 4y dy^2)\, dy$ la această direcţie determină tipul punctelor critice, excepţie făcînd cazul $(dx^2 + 4y dy^2)\, dy = 0$, $(y + a) dx = -x dy$, $6y^3 + 6ay^2 + by + ab - x^2 = 0$, $(18y^2 + 12ay + b)\, dy - x\, dx = 0$, pentru care se utilizează restricţia lui $\frac{1}{24} d^4 f_{abcd} = dy^4$. În spaţiul punctelor (x, y) în punctul $P: x = 0, y = -a$, condiţionat de $6y^2 + b = 0$, există o dublă degenerare: pentru $y > 0$ corespund puncte critice de tipul ombilicului hiperbolic, iar pentru $y < 0$ de tipul ombilicului eliptic. În afara lui P, degenerarea este simplă; deci numai una dintre variabilele x şi y este esenţială şi punctele critice trebuie să fie cuspidale (falduri, întoarceri, rîndunici).

Considerăm *familia de potenţiale* $(x, y) \to f_{abcd}(x, y)$. *Varietatea catastrofă* are ecuaţiile carteziene implicite

$$M: 2xy + 2ax + c = 0, \ 4y^3 + x^2 + 2by + d = 0,$$

care mai poate fi privită şi ca imaginea hărţii $(x,y,a,b) \xrightarrow{r} (a, y, a, b, -2xy - 2ax, -4y^3 - x^2 - 2by)$, fapt ce pune în evidenţă că M este o varietate riglată de dimensiune 4 în $\mathbb{R}^6$.

Dacă χ este *aplicaţia catastrofă*, atunci aplicaţia $\chi \circ r$ are valorile

$$\chi \circ r(x, y, a, b) = (a, b - 2xy - 2ax, -4y^3 - x^2 - 2by)$$

şi jacobianul

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2y-2a & -2x & -2x & 0 \\ -2x & -12y^2-2b & 0 & -2y \end{vmatrix} = 4(6y^3 + 6ay^2 + by + ab - x^2).$$

Rezultă că mulţimea punctelor singulare ale lui $\chi \circ r$ este $\Sigma_1 : 6y^3 + 6ay^2 + by + ab - x^2 = 0$, iar mulţimea singularităţilor lui χ este $S = M \cap \Sigma_1$.

Punctului $P : x = 0, y = a$, condiţionat de $6y^2 + b = 0$, îi corespunde curba $x = 0$, $y = -a$, $6y^2 + b = 0$ situată pe Σ_1. Punctele critice ale lui f_{abcd} corespunzătoare acestei curbe sînt de tipul ombilicului hiperbolic pentru $y > 0$ şi de tipul ombilicului eliptic pentru $y < 0$. În afara acestei curbe avem puncte critice cuspidale (falduri, întoarceri, rîndunici).

4.9. Proprietăţi difeomorf-invariante ale unor legi fizice clasice

4.9.1. *Energia potenţială eficace a unui cîmp central.* Cîmpurile centrale cele mai importante sînt acelea în care energia potenţială este invers proporţională cu r, iar forţele sînt invers proporţionale cu r^2, unde r este modulul vectorului de poziţie al punctului material din spaţiu. Modelele cele mai des întîlnite sînt: cîmpul gravitaţional newtonian (cîmp de atracţie) şi cîmpul electrostatic coulombian (cîmp de atracţie sau de respingere).

În cazul unui cîmp central de forţe, *energia potenţială eficace* este definită prin

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \tag{4.1}$$

unde $\alpha = \text{const} > 0$ şi β este un parametru strict pozitiv. Dacă $\alpha < 0$, avem un cîmp de atracţie, iar dacă $\alpha > 0$ avem un cîmp de respingere. Domeniul maxim de definiţie pentru funcţia U este $(0, \infty)$. Avem $\lim_{r \to 0} U(r) = \infty$, $\lim_{r \to \infty} U(r) = 0$, deci dreptele $r = 0$ şi $U = 0$ sînt asimptote ale graficului lui U. Derivata întîi are expresia

$$U'(r) = -\frac{1}{r^3}(2\beta + r\alpha).$$

Fie $\alpha < 0$. Derivata U' are rădăcina $r = -\frac{2\beta}{\alpha}$, este strict negativă pe $(0, -2\beta/\alpha)$ şi strict pozitivă pe $(-2\beta/\alpha, 0)$. De aceea $r = -2\beta/\alpha$ este un punct de minim, iar $\min U(r) = U\left(-\frac{2\beta}{\alpha}\right) = -\frac{\alpha^2}{4\beta}$. Acestea conduc la următorul tabel de variaţie:

r	0		$-\frac{2\beta}{\alpha}$		∞
U'		$-$	0	$+$	
U	∞	$\searrow$	$-\frac{\alpha^2}{4\beta}$	$\nearrow$	0

Fie $\alpha > 0$. Derivata U' este strict negativă şi deci U este strict descrescătoare. Graficul lui U are alura din fig. 4.17.

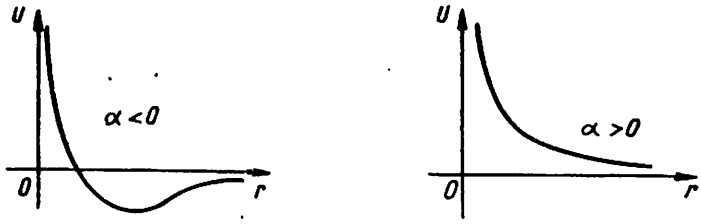


Fig. 4.17

Ecuaţia graficului energiei potenţiale eficace este $Ur^2 - \alpha r - \beta = 0$, $r > 0$, $U \in I_\alpha$, unde $I_\alpha = \left[-\frac{\alpha^2}{4\beta}, \infty\right)$ pentru $\alpha < 0$ şi $I_\alpha = (0, \infty)$ pentru $\alpha > 0$. Considerăm funcţia $\varphi: (0, \infty) \times I_\alpha \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$x = \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2\beta}, \quad a = -\frac{\alpha^2}{4\beta^2} - \frac{1}{\beta} U. \tag{4.2}$$

Evident $\varphi: (0, \infty) \times I_\alpha \to \varphi((0, \infty) \times I_\alpha)$ este un difeomorfism global. Imaginea graficului lui U prin φ este caracterizată prin ecuaţia $x^2 + a = 0$, $x \in \left(\frac{\alpha}{2\beta}, \infty\right)$, $a \in J_\alpha$, unde $J_\alpha = \left(-\infty, -\frac{\alpha^2}{2\beta^2}\right)$ pentru $\alpha < 0$ şi $J_\alpha = \left(-\infty, \frac{-\alpha^2}{4\beta^2}\right)$ pentru $\alpha > 0$. Cu alte cuvinte, graficul lui U este echivalent cu o parte din varietatea catastrofă fald (vezi § 4.2).

Raţionamentul precedent arată că *toate informaţiile difeomorf-invariante despre energia potenţială eficace a unui cîmp central de forţe pot fi*

obținute examinînd potențialul fald $x \to f(x, a) = \frac{1}{3} x^3 + ax$ *în sensul* din § 4.2. În cazul particular ales, dimensiunile mărimilor x și a decurg din (4.1) și (4.2).

4.9.2. *Legea lui van der Waals.* Fie

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = RT \tag{4.3}$$

ecuația fluidelor van de Waals, unde P, V, T sînt respectiv presiunea, volumul și temperatura, iar R, α, β sînt constante strict pozitive. Această

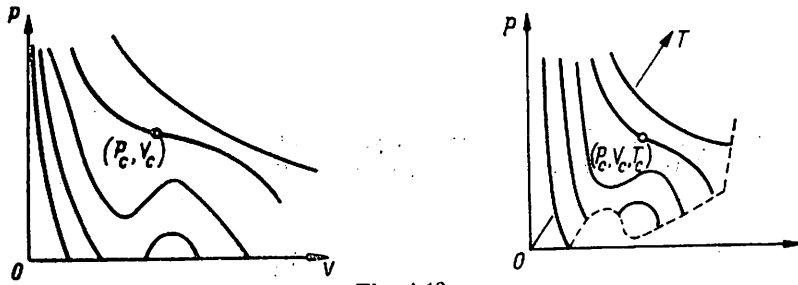


Fig. 4.18

ecuație reprezintă o suprafață situată în primul octant al spațiului de puncte (P, V, T), numită uneori *suprafață van der Waals.* Alura acestei suprafețe (fig. 4.18) rezultă din formele secțiunilor prin planele $T = \text{const}$, iar *punctul critic* are coordonatele $P_c = \frac{\alpha}{27\beta^2}$, $V_c = 3\beta$, $T_c = \frac{8\alpha}{27\beta R}$.

Să stabilim legătura cu teoria catastrofelor. Pentru aceasta considerăm funcția $\varphi : (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$x = \frac{1}{V} - \frac{1}{3\beta},\ a = \frac{P}{\alpha} + \frac{RT}{\alpha\beta} - \frac{1}{3\beta^2},\ b = \frac{-2P}{3\alpha\beta} + \frac{RT}{3\alpha\beta^2} - \frac{2}{27\beta^3} \tag{4.4}$$

(raportul $1/V$ este densitatea). Se observă că $\varphi : (0,\infty)^3 \to \varphi((0,\infty)^3)$ este un difeomorfism global pentru care $\varphi(P_c, V_c, T_c) = (0, 0, 0)$. Imaginea suprafeței lui van der Waals prin φ este caracterizată prin ecuația $x^3 + ax + b = 0$, $x \in \left(-\frac{1}{3\beta}, \infty\right)$, $a \in \left(-\frac{1}{3\beta^2}, \infty\right)$, $b \in \left(-\infty, \frac{-2}{27\beta^3}\right) \cup \left(\frac{-2}{27\beta^3}, \infty\right)$, adică este o parte din varietatea catastrofă întoarcere (vezi § 4.3).

În concluzie, *toate informațiile difeomorf-invariante despre fluidele van der Waals pot fi obținute examinînd potențialul întoarcere* $x \to f(x, a, b) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ax^2 + bx$ *în sensul din* § 4.3, *potențial care este echivalent cu energia liberă a lui Gibbs* [25]. Desigur, în cazul discutat, dimesiunile mărimilor $x, a. b$ decurg din (4.3) și (4.4).

5

APLICAŢII ALE TEORIEI EXTREMELOR

5.1. Maximul intensităţii, al fluxului şi al densităţii de radiaţie

Schimbul de căldură prin radiaţie, care stă la baza multor capitole din fizică, astrofizică, termotehnică etc., prezintă următoarele particularităţi:

1) radiaţia termică este rezultanta transformării energiei termice a corpului în energia undelor electromagnetice cu lungimea de undă în intervalul $[4\cdot10^{-2}, 4\cdot10^{-5}]$ [cm];

2) schimbul de căldură prin radiaţie se poate realiza de la distanţă, nu este necesar contactul direct între corpuri;

3) fluxul de energie radiantă are un sens dublu; corpul radiază energie dar şi absoarbe energia emisă sau reflectată de corpurile înconjurătoare;

4) radiaţiile termice invizibile respectă aceleaşi legi ca şi cele luminoase: se propagă în linie dreaptă, se reflectă, se refractă, se absorb.

a) *Legea lui Max Planck.* Intensitatea de radiaţie I_ν este energia radiantă în unitatea de timp, de unitatea de suprafaţă, într-o anumită frecvenţă.

Dacă se cunoaşte legea de distribuţie a energiei radiante în funcţie de ν, deci funcţia $\nu \to I_\nu$, se poate determina densitatea de putere radiantă, $E = \int_0^\infty I_\nu \, d\nu$, cantitate ce interesează instalaţiile energetice solare care folosesc efectul termic al radiaţiilor prin aparate de captare. În 1901, fizicianul Max Planck a găsit expresia intensităţii de radiaţie în funcţie de frecvenţa de radiaţie ν şi de temperatura T şi anume $I_\nu(T) = 2\pi hc^{-3} \nu^5 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^{-1}$, unde $h = 6{,}624\cdot10^{-27}$ erg·s este constanta lui Planck, $c = 3\cdot10^{10}$ cm/s este viteza luminii în vid, $k = 1{,}38\cdot10^{-16}$ erg/grad este constanta lui Boltzmann.

Funcţia $(\nu, T) \to I_\nu(T)$ nu are extreme pe interiorul domeniului său de definiţie deoarece funcţia parţială $T \to I_\nu(T)$ este strict crescătoare. Pe de altă parte, reprezentarea grafică a variaţiei funcţiei $\nu \to I_\nu(T)$ la diferite temperaturi pentru corpul negru $\left(\text{fig. 5.1, în care } \lambda = \frac{c}{\nu}\right)$ arată că în spectrul de radiaţie al acestui corp, fiecărei temperaturi T îi corespunde o valoare maximă globală a funcţiei parţiale $\nu \to I_\nu(T)$, punctul de maxim fiind punct interior şi deplasîndu-se spre ν-mare (λ-mic) la creşterea temperaturii.

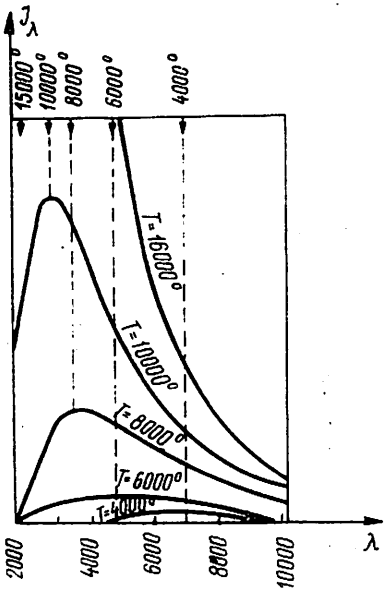


Fig. 5.1

Punctul critic al funcţiei $\nu \to I_\nu(T)$ este soluţia ecuaţiei $\frac{\partial I_\nu(T)}{\partial \nu} = 0$, unde

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial \nu} = 2\pi hc^{-3}\left\{5\nu^4\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]-\right.$$

$$\left.-\nu^5\frac{h}{kT}\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)\right\}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]^{-2}.$$

Notînd $\frac{h\nu}{kT} = x$ şi rezolvînd ecuaţia transcendentă $5(e^x - 1) = xe^x$, obţinem rădăcina reală $x = \frac{h\nu}{kT} \approx 4{,}965$. Deoarece $\frac{\partial^2 I_\nu(T)}{\partial \nu^2}\left(\frac{4{,}965\,Tk}{h}\right) < 0$, rezultă că punctul critic este un punct de maxim şi

$$\max_\nu I_\nu(T) \approx 2\pi c^{-3} h^{-4}(4{,}965)^5 k^5 T^5 [\exp(4{,}965) - 1]^{-1}.$$

Se observă că frecvenţa este proporţională cu temperatura, adică la temperaturi ridicate punctul de maxim al intensităţii de radiaţie se deplasează spre frecvenţe mari.

b) Într-o atmosferă stelară, cantităţile fundamentale din radiaţia emergentă a stelei şi anume funcţiile: $(\tau_\nu, \theta) \to I_\nu(\tau_\nu, \theta)$ (intensitatea monocromatică), $\tau_\nu \to J_\nu(\tau_\nu)$ (intensitatea monocromatică medie) şi $\tau_\nu \to F_\nu(\tau_\nu)$ (fluxul monocromatic) sînt date respectiv de următoarele expresii:

$$I_\nu(\tau_\nu, \theta) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu)\, e^{-(\tau_\nu - t_\nu)\sec\theta}\, dt_\nu \sec\theta - \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu)\, e^{(\tau_\nu - t_\nu)\sec\theta}\, dt_\nu \sec\theta,$$

$$J_\nu(\tau_\nu)=\frac{1}{2}\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu)E_1(t_\nu-\tau_\nu)\,dt_\nu-\frac{1}{2}\int_{0}^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu)\,E_1(\tau_\nu-t_\nu)\,dt_\nu,$$

$$F_\nu(\tau_\nu)=2\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu)\;E_2(t_\nu-\tau_\nu)\;dt_\nu-2\int_{0}^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu)\,E_2(\tau_\nu-t_\nu)\,dt_\nu,$$

unde

$$E_n(x)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-xy}}{y^n}\,dy \qquad (y=\sec\theta);$$

S_ν este funcţia sursă pe care o considerăm egală cu funcţia Planck în cazul studiat al echilibrului termodinamic local (ETL), τ_ν adîncimea optică monocromatică şi t_ν adîncimea geometrică în atmosfera stelară legate prin relaţia $d\tau_\nu=-\varkappa_\nu\rho\,dt_\nu$, ρ densitatea stelei şi $\varkappa_\nu$ coeficientul monocromatic de absorbţie pe gram de materie. Observaţiile efectuate la suprafaţa Soarelui dau frecvenţele pentru care $\nu\to I_\nu(0,0)$ (intensitatea monocromatică) sau fluxul monocromatic $\nu\to F_\nu(0)$ sînt maxime. Aceasta a sugerat faptul că nu numai la suprafaţă, ci şi la anumite adîncimi în atmosfera stelară s-ar putea ca aceste funcţii să atingă valori maxime.

În cazul fluxului monocromatic $\tau_\nu\to F_\nu(\tau_\nu)$ vom determina adîncimea optică în atmosferă, τ_ν, pentru care $F_\nu(\tau_\nu)$ este maxim. Într-o atmosferă stelară, transferul energiei se face cu preponderenţă prin radiaţii, ecuaţia fundamentală a echilibrului radiativ fiind

$$\frac{1}{4\pi}\frac{dF_\nu}{d\tau_\nu}=\varkappa_\nu\,(J_\nu-S_\nu).$$

Aşadar, punctele critice ale funcţiei F_ν sînt soluţiile ecuaţiei $J_\nu(\tau_\nu)=S_\nu(\tau_\nu)$.

În cazul ideal al unei atmosfere gri, cu o distribuţie de temperatură $T^4=\frac{3}{4}\,T_e^4[\tau+q(\tau)]\approx\frac{3}{4}\,T_e^4\left(\tau+\frac{2}{3}\right)$ (T_e fiind temperatura efectivă a stelei) Eddington a arătat că $F(\tau)=c=\text{const}$ şi deci $\frac{dF}{d\tau}=0$. Extindem procedeul de calcul al lui Eddington la calculul aproximativ al maximului funcţiei F_ν. Mai întîi, prin procedee aproximative, localizăm punctul critic al funcţiei F_ν care satisface condiţia $\int_0^{\infty}F_\nu(\tau_\nu)\,d\nu\approx\text{const}$. Pentru aceasta, evaluăm valorile funcţiei $\tau\to J_\nu(\tau)$ (ν fixat), folosind formulele

de interpolare Reiz [2] și valorile funcției $\tau \to S_\nu(\tau) = B_\nu(\tau)$ (ν fixat), prin aproximarea

$$B_\nu(\tau) = B_\nu\left(\frac{2}{3}\right)\{a_{0\nu} + a_{1\nu}\,\tau + a_{2\nu}\,\tau^2\},$$

unde

$$a_{0\nu} = 1 - \frac{1}{8}\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} + \frac{1}{8\cdot 16}\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}\left(\alpha\frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} - 5\right), \quad \alpha = \frac{h\nu}{kT_e},$$

$$a_{1\nu} = \frac{3}{16}\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} - \frac{3}{8\cdot 16}\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}\left(\alpha\frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} - 5\right);$$

$$a_{2\nu} = \frac{9}{2\cdot 16^2}\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}\left(\alpha\frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} - 5\right).$$

Condiția $J_\nu(\tau_\nu) \approx S_\nu(\tau_\nu)$ arată că F_ν posedă un punct critic $\tau \in \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$. Evaluînd numeric valorile funcției $\tau \to F_\nu(\tau)$ și ale derivatei $\tau \to \frac{dF_\nu}{d\tau}(\tau)$ cu ajutorul programului din problema 2.26, găsim

$F_\nu(\tau)$ în unități ale lui F			$dF_\nu(\tau)$	
τ	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$
0	0,1837	0,1772	−0,11	0,024
0,1	0,1732	0,1791	−0,098	0,015
0,2	0,1640	0,1801	−0,088	0,007
0,3	0,1556	0,1804	−0,080	0,001
0,4	0,1480	0,1802	−0,074	−0,005
0,5	0,1407	0,1793	−0,068	−0,008
0,6	0,1342	0,1783	−0,063	−0,010

Acest tabel confirmă că punctul critic $\tau_1 \in \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$ este punct de maxim pentru $\alpha = 4 = \frac{h\nu}{kT_e}$.

c) *Densitatea maximă a radiației solare pe teritoriul țării noastre.* Avînd în vedere că la ora actuală cea mai prețioasă energie de radiație este cea provenită de la Soare, vom explica în cele ce urmează spectrul continuu al Soarelui care prezintă un maxim de intensitate pentru $\lambda \approx$ $\approx$470nm, corespunzînd unei temperaturi de culoare de 6 050°K adică în domeniul radiațiilor albastre. De la acest maxim, intensitatea de radiație I_λ scade brusc spre extremitatea violetă a spectrului și relativ lin spre extremitatea roșie. Variația funcției $\lambda \to I_\lambda$ pentru Soare este repre-

ţentată grafic prin curba îngroşată din fig. 5.2. Această curbă nu se suprapune peste curba intensităţii radiaţiei corpului negru de la aceeaşi temperatură, diferenţa datorîndu-se faptului că în Soare are loc absorbţia continuă a radiaţiei de către ionii negativi de hidrogen din fotosferă.

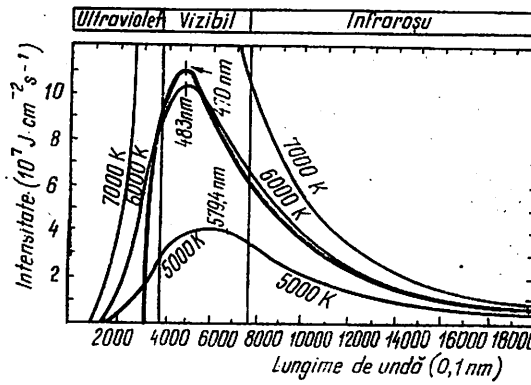


Fig. 5.2

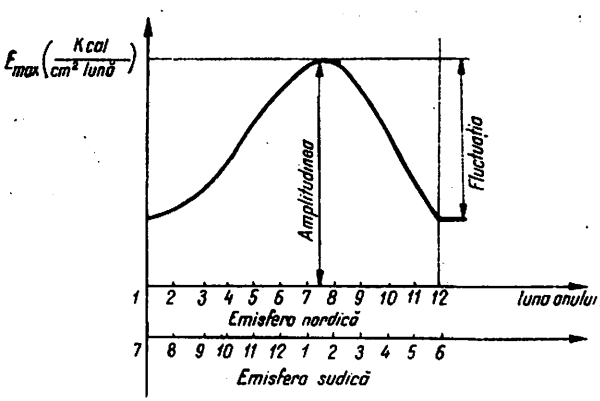


Fig. 5.3

Această distribuţie a intensităţii de radiaţie din spectru, funcţie de lungimea de undă sau de frecvenţa fotonilor, interesează ca alura în special pentru cercetările şi realizările privind conversia directă a energiei solare în energie electrică prin celule fotovoltaice. Instalaţiile energetice solare care folosesc efectul termic al radiaţiilor solare sînt interesate mai puţin în spectrul propriu-zis (I_λ) şi mai mult în densitatea de putere radiantă $E = \int_0^\infty I_\lambda \, d\lambda$, corespunzătoare condiţiilor geofizice şi meteorologice în care se plasează la un moment dat instalaţia de captare.

În scopul captării şi conversiei energiei solare, într-un loc anumit pe Pămînt trebuie ţinut seama de următoarele caracteristici ale energiei solare a căror semnificaţie este dată de fig. 5.3 :

1) forma curbei de variaţie a densităţii de putere radiantă, pe perioada de un an;

2) amplitudinea radiaţiei reprezentînd raportul dintre densitatea maximă a radiaţiei din regiunea respectivă şi densitatea maximă medie pe Pămînt (23 kcal/lună); din acest punct de vedere regiunile geografice sînt clasificate în 10 grupe, prima grupă corespunzînd unei radiaţii lunare maxime de 90—100% iar grupa a zecea 0—10% din radiaţia maximă medie de pe Pămînt;

3) fluctuaţia radiaţiei care reprezintă diferenţa dintre valorile maxime şi minime ale radiaţiei medii lunare.

Conform acestor caracteristici, fiecare ţară face parte dintr-o anumită regiune de radiaţie solară. Astfel, România se caracterizează printr-o formă a curbei de variaţie de tipul celei din fig. 5.3, proprie aşa-numitului regim zenital şi este grupa 3 în ceea ce priveşte radiaţia lunară maximă care atinge valori relativ mari pe teritoriul ţării noastre.

5.2. Extremele unor funcţii din electrostatică şi circuite electrice de curent continuu

1. Fie două corpuri punctuale avînd sarcinile egale respectiv cu q_1 nC şi q_2 nC, $q_2 > q_1$ (nC fiind un nanocoulomb), situate în aer la distanţa d m unul de altul. Să se studieze variaţia intensităţii cîmpului electric şi a potenţialului electric de-a lungul dreptei care uneşte aceste corpuri.

Rezolvare. Intensitatea cîmpului electric al unui corp punctual avînd sarcina q, într-un punct M situat la distanţa r faţă de acesta, este $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$, iar potenţialul electric în punctul M (fig. 5.4) este

$$V = \int_M^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r},$$

unde $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ este permitivitatea absolută a mediului, în care $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\, 9 \cdot 10^9} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m este permitivitatea absolută a vidului, iar ε_r este permitivitatea relativă a mediului (în cazul aerului $\varepsilon_r = 1$).

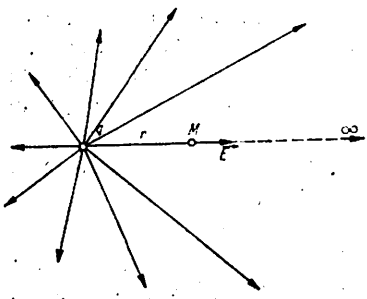


Fig. 5.4

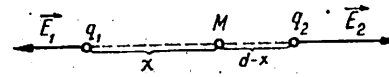


Fig. 5.5

Intensitatea cîmpului electric de-a lungul dreptei care unește cele două corpuri (fig. 5.5) este dată de funcția $x \to E(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(d-x)^2}\right]$ care admite un maxim între cele două puncte $x = 0$ și $x = d$. Într-adevăr, calculînd derivata întîi

$$E'(x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_2x^3 - q_1(d-x)^3}{x^3\,(d-x)^3}$$

și anulînd-o, obținem ecuația $q_1(x-d)^3 + q_2x^3 = 0$ care are o singură rădăcină reală $x_0 = d/(1+\sqrt[3]{q_2/q_1})$, numai în cazul cînd q_1 și q_2 au semne contrare, deoarece conform șirului lui Rolle ecuația $q_1(x-d)^2 + q_2x^2 = 0$ sau $(q_1+q_2)x^2 - 2dq_1x + q_1d^2 = 0$ are rădăcinile reale $x_{1,2} = d\frac{q_1 \pm \sqrt{-q_1q_2}}{q_1+q_2}$ dacă $q_1q_2 < 0$, $x_0 \in [x_1, x_2]$.

Derivata de ordinul doi $E''(x) = \frac{3}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{-q_2}{(d-x)^4} + \frac{q_1}{x^4}\right]$ calculată în x_0 este pozitivă dacă $q_1 < 0$ și $q_2 > 0$, deci x_0 este un punct de minim și $E_{min} = \frac{1+\sqrt[3]{q_2/q_1}}{4\pi\varepsilon\, d^2}\left[q_1 - q_2\sqrt[3]{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2}\right]$.

Variația funcției $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată în fig. 5.6, în care s-a ales originea axelor la mijlocul distanței dintre cele două corpuri și sensul pozitiv de la primul spre al doilea corp. Linia plină este cazul $q_1, q_2 > 0$, iar linia întreruptă $q_1 < 0$, $q_2 > 0$.

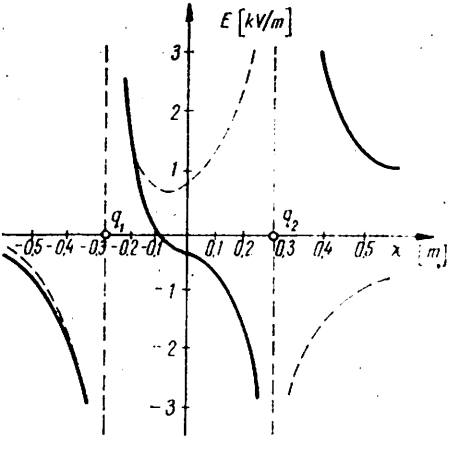


Fig. 5.6

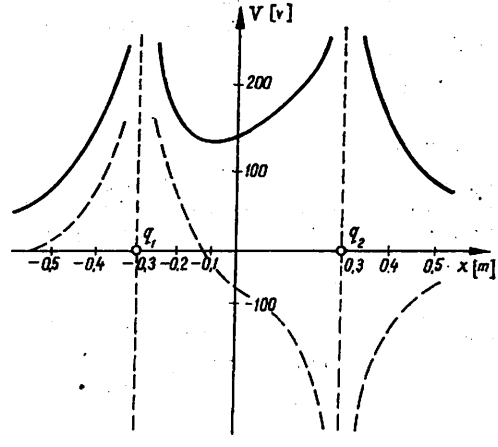


Fig. 5.7

Potențialul electric în lungul dreptei care unește cele două puncte materiale este dat de funcția $x \to V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1}{x} - \frac{q_2}{d-x}\right)$ care are un minim între aceste puncte după cum va rezulta din următoarele calcule: derivata întîi $V'(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q_2}{(d-x)^2} - \frac{q_1}{x^2}\right]$ se anulează în

punctul $x_0 = d/(1+\sqrt{q_2/q_1})$, cînd q_1 şi q_2 sînt de acelaşi semn şi deoarece derivata $V'' = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{q_1}{x^3} - \frac{q_2}{(d-x)^3}\right]$ calculată în x_0, este pozitivă, adică

$$V''(x_0) = \frac{1}{2\pi\varepsilon\, d^3}(1 + \sqrt{q_2/q_1})^3 (1 - \sqrt{q_1/q_2}) > 0,$$

rezultă că punctul x_0 este un punct de minim, iar $V_{\min} = \frac{1}{4\pi\varepsilon d}[q_1 - \sqrt{q_1 q_2}](1 + \sqrt{q_2/q_1})$.

Variaţia acestei funcţii este dată în fig. 5.7.

2. Se consideră o sursă cu rezistenţa internă r, tensiunea la borne U şi t.e.m. E. Se cere: a) să se determine variaţia puterii P dată de sursă circuitului conectat la bornele ei; b) care este tensiunea la bornele sursei pentru care puterea dată de sursă este maximă şi care este în acest caz randamentul maxim; c) ce semnificaţie fizică are puterea dată P cînd are valoare negativă; d) care este puterea maximă pe care o poate da sursa unui rezistor legat la bornele ei şi care este rezistenţa rezistorului ce ia această putere maximă?

Rezolvare. Puterile unei surse avînd t.e.m. E, tensiunea la borne U, intensitatea curentului I şi rezistenţa internă r sînt:

— puterea electrică totală produsă de sursă $P_E = EI$;
— puterea electrică pierdută în sursă prin efectul Joule $P_p = rI^2$;
— puterea electrică (utilă) cedată de sursă în exterior, puterea la borne $P = UI$.

Bilanţul puterilor la o sursă este $P_E = P_p + P$, unde P_E şi P sînt mărimi algebrice care pot fi pozitive sau negative.

a) Eliminînd din aceste relaţii intensitatea cu ajutorul legii lui Ohm: $U = RI$, $-RI + E = rI$, obţinem puterea (algebrică) totală a sursei $P = U(E-U)/r$. Funcţia $U \to P(U)$ admite punctul de maxim $U = E/2$ deoarece $P'(U) = (E - 2U)/r$ se anulează pentru $U = E/2$, iar $P''(U) = -2/r$ este negativ. b) Valoarea acestui maxim este $P_{\max} = \frac{E^2}{4r}$, iar randamentul $\eta_{\max} = \frac{P_{\max}}{P_{E\max}} = \frac{E^2}{4r}\cdot\frac{2r}{E^2} = \frac{1}{2}$. c) Graficul funcţiei $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o parabolă în care $P < 0$ reprezintă o putere primită. d) Puterea dată de o sursă rezistorului legat la bornele ei are expresia $P = RI^2$ sau $P = RE^2/(R + r)^2$ care este o funcţie $R \to P(R)$, deoarece E şi r sînt cunoscute. Punctul critic al acestei funcţii se obţine anulînd derivata întîi $P'(R) = E^2\frac{r - R}{(R+r)^2}$; ecuaţia $P'(R) = 0$ are rădăcina $R = r$ şi deoarece $P'(R) > 0$ pentru $R < r$ şi $P'(R) < 0$ pentru $R > r$, rezultă că punctul $R = r$ este un punct de maxim, iar valoarea maximă a funcţiei este $P_{\max} = E^2/4r$.

O b s e r v a ţ i e. Orice sursă dă în exterior o putere maximă atunci cînd se leagă la bornele ei un rezistor de rezistenţă egală cu rezistenţa internă a sursei.

5.3. Legea refracţiei

O aplicaţie importantă a teoriei optimizării funcţiilor este deducerea legii lui Snell a refracţiei. Aceasta are la bază principiul lui Fermat al minimului: timpul scurs între trecerea luminii prin două puncte fixe are un extrem, cu respectarea traiectoriei posibile care uneşte cele două puncte.

Pentru concretizare să presupunem că raza luminoasă străbate două medii omogene alăturate, de exemplu aer şi apă, avînd viteza c_1 în aer şi viteza c_2 în apă. Considerăm traiectoria din planul xOy care conţine punctele fixe A şi B. Aceasta este în mod necesar alcătuită din două segmente de dreaptă care se întîlnesc într-un punct M de pe linia de separaţie a celor două medii, întrucît mediile sînt omogene iar drumul cel mai scurt dintre două puncte din plan este un segment de dreaptă. Luînd axele de coordonate ca în fig. 5.8, avem $A(0,a)$, $B(d,b)$, $M(x,0)$, $AM=\sqrt{a^2+x^2}$, $MB=\sqrt{(d-x)^2+b^2}$ şi timpul de parcurgere a liniei frînte AMB este $t(x)=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}+\dfrac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{c_2}$. Această expresie defineşte o funcţie $t:\ \mathbb{R}\to[t_{\min},\infty)$. Într-adevăr, se constată că $\lim\limits_{x\to\pm\infty} t(x)=\infty$, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}}-\dfrac{d-x}{c_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$ şi $\dfrac{d^2t}{dx^2}=\dfrac{a^2}{c_1(a^2+x^2)^{3/2}}+\dfrac{b^2}{c_2[(d-x)^2+b^2]^{3/2}}>0$.

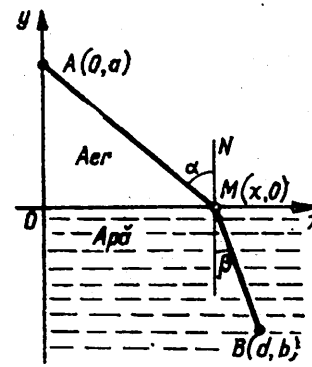


Fig. 5.8

Retultă că derivata t' este o funcţie strict crescătoare de la $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{c_1}-\dfrac{1}{c_2}$ la $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}$, iar t este o funcţie strict convexă. Deci ecuaţia $\dfrac{dt}{dx}=0$, adică $\dfrac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}}=\dfrac{d-x}{c_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$ are o singură rădăcină reală x_0, aceasta fiind un punct de minim global pentru t şi deci $t_{\min}=t(x_0)$.

Dacă α şi β sînt unghiurile dintre AM, respectiv MB şi normala MN, adică $\sin\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\sin\beta=\dfrac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$, atunci condiţia necesară şi suficientă pentru minimul lui t se transcrie $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{c_1}{c_2}$, relaţie ce reprezintă legea lui Snell.

5.4. Maximul energiei libere a germenilor în formarea cristalelor

Cristalizarea metalelor şi aliajelor metalice se poate realiza din topituri prin solidificare, din vapori prin sublimare şi prin recristalizări în stare solidă cu sau fără reacţii, obţinîndu-se forme asociate proprietă-

ţilor mecanice şi fizice impuse. Cristalizarea are două etape: germinarea particulelor şi creşterea acestora. Germinarea particulelor este un fenomen complex care depinde de structura, volumul şi forma germenului. Apariţia unui germene se datoreşte unei eliberări de căldură latentă prin schimbul de atomi lichid-solid, care se face în detrimentul stării lichide, cînd temperatura scade sub o valoare critică. Apariţia unui germene este însoţită de o energie superficială la limita fazelor ΔF_s, de o energie de deformare datorită variaţiei de volum şi formă ΔF_d şi de o energie interfazică ΔF_m, astfel încît energia liberă a noului germene va fi $\Delta F = -\Delta F_m + \Delta F_s + \Delta F_d$.

Într-o primă aproximaţie, considerăm că germenele are forma unui cub de latură x, neglijăm termenul ΔF_d şi presupunem că energia interfazică este proporţională cu cantitatea germenilor $\Delta F_m = k_1 x^3$, unde funcţia $T \to k_1(T)$ creşte cînd temperatura scade sub valoarea critică (temperatura de echilibru implicînd $k_1 = 0$); energia superficială este proporţională cu aria germenilor $\Delta F_s = k_2 x^2$, unde funcţia $T \to k_2(T)$ variază mai puţin cu temperatura decît k_1. În aceste condiţii,

$$\Delta F = -\Delta F_m + \Delta F_s = -k_1(T)\, x^3 + k_2(T) x^2.$$

Considerînd o anumită subrăcire, la o temperatră constantă, sub valoarea critică, k_1 şi k_2 vor fi constante şi $\Delta F = f(x)$. Ecuaţia $f(x) \equiv -k_1 x^3 + k_2 x^2 = 0$ are rădăcinile $x_1 = x_2 = 0$ şi $x_3 = k_2/k_1$. Punctul critic al funcţiei f reprezintă mărimea critică x_0 a germenului şi este dată de rădăcina nenulă a ecuaţiei $f'(x) \equiv -3k_1 x^2 + 2k_2 x = 0$:

$$x_0 = \frac{2}{3}\frac{k_2}{k_1} \text{ sau } x_0 = \frac{2}{3} x_3.$$

Deoarece $f''(x) = -6k_1 x$ este negativă pentru $\forall x \in [x_1, x_3]$, funcţia $f = \Delta F$ are un maxim în punctul $x_0 = \frac{2}{3} x_3$. valoarea maximă a energiei fiind $\Delta F_{max} = f(x_0) = \frac{4}{27}\frac{k_2^3}{k_1^2}$.

Din variaţia funcţiei ΔF (fig. 5.9) putem trage următoarele concluzii:

1) dacă germenii vor avea dimensiuni mai mici decît x_0, atunci ΔF creşte şi germenii vor fi metastabili; se vor dizolva chiar dacă iau naştere datorită fluctuaţiilor;

2) pentru ca germenii să fie stabili trebuie ca dimensiunea lor să fie mai mare decît x_0 dacă ΔF scade. Dacă se consideră germenii x' şi x'' astfel ca $x' > x_0$, $x'' > x_0$ şi $x' < x''$, atunci vor fi mai stabili germenii x'', deoarece $\Delta F(x'') < \Delta F(x')$, fapt ce explică coalescenţa şi formarea cristalului.

Datorită energiei superficiale un germene ar avea tendinţa să aibă forma sferică $\left(\text{atunci } \Delta F_m = \frac{4\pi h_1 x^3}{3} \text{ şi } \Delta F_s = 4\pi k_2 x^2\right)$, însă forma ger-

menului este mult influenţată şi de energia de deformare ΔF_d care atinge valoarea minimă cînd germenii au forma unui elipsoid cu semiaxele a (diametrul ecuatorial) şi c (diametrul polar). Studiind variaţia lui $\Delta F_d = f\left(\frac{c}{a}\right)$ (fig. 5.10), se constată următoarele:

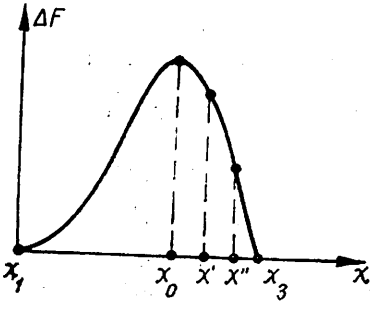


Fig. 5.9

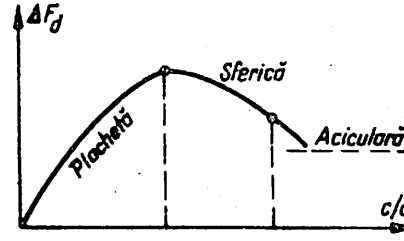


Fig.5.10

1) cînd $\frac{c}{a} = 1$ germenii au forma sferică,

2) cînd $\frac{c}{a} < 1$ (foarte mic), germenii au forma unor plachete (poliedre), întîlnite cel mai des în practică,

3) cînd $\frac{c}{a} > 1$ (foarte mare), germenii au aşa-numita formă aciculară.

În final, putem afirma că germenii mici au o energie liberă mai mare decît cei de dimensiuni mari, încît într-o soluţie lichidă cu particule de dimensiuni diferite ei nu pot exista în echilibru. Deoarece, în zona particulelor de dimensiuni apreciabile, energia liberă este mai mică, aceste particule se vor dezvolta pe seama celor mici prin fenomenul de coalescenţă, dînd naştere cristalelor, situaţie care se întîlneşte dealtfel şi în fenomenul recristalizării din starea solidă.

Teoria catastrofelor (§ 4.3) oferă un studiu mai complet pentru problema precedentă [25].

5.5. Legi de creştere

Cercetările statistice privind înmulţirea şi dezvoltarea în timp a populaţiilor au condus la concluzia că asemenea fenomene sînt descrise de funcţii reale $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(t) = \frac{\alpha}{1 + 10^{-\beta(t-\gamma)}}$, unde α, β, γ sînt constante strict pozitive impuse de fiecare caz în parte. De exemplu, în experienţele lui Thornton privind înmulţirea în timp a microorganismelor, într-un spaţiu limitat s-au găsit $\alpha = 48{,}4605$; $\beta = 0{,}92419$;

$\gamma = 2{,}478$, iar în studiul creşterii în timp a florii soarelui, efectuat de Reed şi Holland, s-au obţinut $\alpha = 261{,}1$; $\beta = 0{,}26628$; $\gamma = 4{,}89$. Deoarece

$$f'(t) = \frac{\alpha\beta\, 10^{-\beta(t-\gamma)} \ln 10}{(1 + 10^{-\beta(t-\gamma)})^2} > 0, \quad \forall t \in [0, \infty),$$

funcţia f creşte strict de la $f(0) = \dfrac{\alpha}{1 + 10^{\beta\gamma}}$ spre $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \alpha$, dreapta $y = \alpha$ fiind asimptotă orizontală a graficului $G(f)$. Pe de altă parte

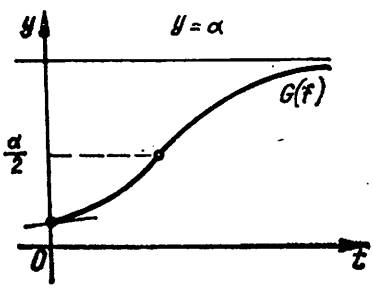


Fig. 5.11

$$f''(t) = \frac{-\alpha\beta^2(\ln 10)^2\, 10^{-2\beta(t-\gamma)}\,(10^{\beta(t-\gamma)} - 1}{(1 + 10^{-\beta(t-\gamma)})^3}$$

arată că $f''(\gamma) = 0$, $f''(t) < 0$ pentru $t > \gamma$ şi $f''(t) > 0$ pentru $t < \gamma$, adică $(\gamma, \alpha/2)$ este un punct de inflexiune al graficului $G(f)$. Deoarece $f'(0) = \dfrac{\alpha\beta\, 10^{\beta\gamma} \ln 10}{(1 + 10^{\beta\gamma})^2}$, graficul lui f are forma din fig. 5.11. Orice restricţie $f: [0, a] \to \mathbb{R}$ admite minimul $f(0)$ şi maximul $f(a)$, ambele fiind extreme globale.

5.6. Valori proprii ale unei matrice reale simetrice

Fie $\mathbf{A}$ o matrice pătrată de ordinul n cu elemente complexe şi $\mathbf{x}$ o matrice nenulă de tipul $n \times 1$ (vector coloană) cu elemente complexe. Dacă există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încît $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, atunci $\mathbf{x}$ se numeşte *vector propriu* pentru matricea $\mathbf{A}$, iar λ se numeşte *valoare proprie* a lui $\mathbf{A}$. Ecuaţia matriceală $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$, unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate, este echivalentă cu un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute care are şi soluţii nebanale dacă şi numai dacă determinantul ataşat este nul. Aşadar, vectorii proprii există dacă şi numai dacă $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Această ecuaţie (în complex) se numeşte *ecuaţia caracteristică* a matricei $\mathbf{A}$. Evident, valorile proprii ale lui $\mathbf{A}$ sînt soluţiile ecuaţiei caracteristice.

Să presupunem că $\mathbf{A}$ este o matrice reală ($\mathbf{A}$ coincide cu conjugata ei $\overline{\mathbf{A}}$) şi simetrică ($\mathbf{A}$ coincide cu transpusa ei ${}^t\mathbf{A}$).

Teoremă. *Valorile proprii ale unei matrice reale şi simetrice sînt reale.*

Demonstraţie. Prin conjugare complexă a ecuaţiei $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ găsim $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}$. Prima ecuaţie o înmulţim la stînga cu ${}^t\overline{\mathbf{x}}$ iar a doua cu ${}^t\mathbf{x}$.

Relaţia $\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}$ implică ${}^t\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$ şi deci $(\lambda - \bar{\lambda})\,{}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = 0$. Pe de altă parte, ${}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} \neq 0$; rămîne $\lambda = \bar{\lambda}$, adică λ este un număr real.

Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice reală simetrică şi $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}$ forma pătratică reală ataşată.

Teoremă. *Valorile critice ale restricţiei lui f la sfera $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = {}^t\mathbf{x}\mathbf{x} = 1$ sînt valorile proprii ale matricei* $\mathbf{A}$.

Demonstraţie. Un punct $\mathbf{x}$ de pe sfera de rază unu este punct critic pentru f dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$\nabla({}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda\nabla({}^t\mathbf{x}\mathbf{x}),$$

adică $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Apoi ${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\,({}^t\mathbf{x}\mathbf{x}) = \lambda$ şi astfel afirmaţia este justificată.

O consecinţă imediată a raţionamentului precedent este faptul că $\min\{{}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} \mid {}^t\mathbf{x}\mathbf{x} = 1\}$ şi $\max\{{}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} \mid {}^t\mathbf{x}\mathbf{x} = 1\}$ sînt respectiv cea mai mică şi cea mai mare valoare proprie ale matricei $\mathbf{A}$.

Observaţie. Dacă dorim să evităm teoria extremelor legate, atunci în loc de restricţia lui f la sfera de rază unu se consideră funcţia reală definită prin $q(x) = \dfrac{{}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}}{{}^t\mathbf{x}\mathbf{x}}$. Ca şi mai înainte, se arată că valorile critice ale lui q sînt valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$.

5.7. Extremele momentelor de inerţie

a) Momentul de inerţie al unei plăci plane în raport cu o axă este dat de expresia

$$I = \iint_D r^2\gamma(x, y)\, dx\, dy, \tag{5.1}$$

unde r este distanţa de la un punct curent al plăcii la axa respectivă (rdeapta OL din fig. 5.12), iar $\gamma(x, y)$ este densitatea materialului din care este confecţionată placa. Pentru simplificarea calculelor, vom presupune placa omogenă, avînd densitatea constantă egală cu unitatea. În acest caz, momentul de inerţie se calculează după formula

$$I = \iint_D r^2\, dx\, dy. \tag{5.2}$$

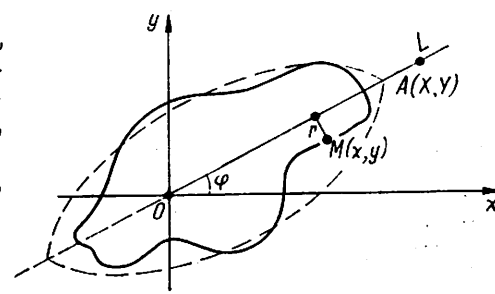


Fig. 5.12

Ţinînd seama de ecuaţia normală a dreptei OL, distanţa r se exprimă prin $|x \sin\varphi - y \cos\varphi|$ şi deci $r^2 = x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi - 2xy \sin\varphi \cos\varphi$, încît (5.2) devine

$$I = \sin^2\varphi \iint_D x^2\,dx\,dy + \cos^2\varphi \iint_D y^2\,dx\,dy - 2\sin\varphi\cos\varphi \iint_D xy\,dx\,dy. \quad (5.3)$$

Facem următoarele notaţii:

$$I_{xx} = \iint_D y^2\,dx dy\,;\quad I_{yy} = \iint_D x^2 dx\,dy\,;\quad I_{xy} = \iint_D xy\,dx\,dy.$$

I_{xx} şi I_{yy} se numesc *momente axiale* iar I_{xy} se numeşte *momentul de inerţie centrifugal.* Cu aceste notaţii relaţia (5.3) se poate scrie sub forma

$$I = I_{xx} \cos^2\varphi + I_{yy} \sin^2\varphi - 2\,I_{xy} \sin\varphi \cos\varphi, \quad (5.3')$$

sau, împărţind prin I, obţinem ecuaţia

$$1 = I_{xx}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2 + I_{yy}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2 - 2I_{xy}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{I}}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}, \quad (5.4)$$

Considerăm pe dreapta OL un punct A, astfel încît $OA = \frac{1}{\sqrt{I}}$, şi notăm cu X şi Y proiecţiile lui OA pe axele de coordonate, adică

$$X = OA \cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}} \text{ şi } Y = OA \sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{I}}.$$

Cu acestea (5.4) se transcrie sub forma

$$1 = I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 - 2I_{xy}XY, \quad (5.5)$$

ecuaţie care reprezintă o elipsă în planul XOY deoarece este satisfăcută relaţia (inegalitatea lui Schwarz-Buneakovski) $I_{xx}I_{yy} - I^2_{xy} > 0$, $\left(\iint_D xy\,dx\,dy\right)^2 \leqslant$

$$< \left(\iint_D x^2\,dx\,dy\right)\left(\iint_D y^2\,dx\,dy\right).$$

Distanţa OA va avea două valori extreme corespunzătoare axelor elipsei, deci funcţia $I = \frac{1}{OA^2}$ va avea şi ea două valori extreme, un maxim corespunzător axei mici şi un minim corespunzător axei mari a elipsei.

Semiaxele elipsei, şi deci direcţiile pe care se realizează valorile extreme ale momentului de inerţie se pot afla prin două metode.

M e t o d a I. Vom considera că ecuaţia (5.5) defineşte funcţia $X \to Y(X)$, ca funcţie implicită şi deci punctele probabile de extrem sînt date de abscisele soluţiilor sistemului.

$$2XI_{xx} - 2YI_{xy} = 0, \quad X^2I_{xx} + Y^2I_{yy} - 2XYI_{xy} - 1 = 0,$$

cu condiţia $YI_{yy} - XI_{xy} \neq 0$, adică de abscisele X_1 şi X_2 ale punctelor:

$$M_1\left[\frac{I_{xy}}{Z(I_{xx})^{1/2}}, \frac{(I_{xx})^{1/2}}{Z}\right], \text{ respectiv } M_2\left[\frac{-I_{xy}}{Z(I_{xx})^{1/2}}, -\frac{(I_{xx})^{1/2}}{Z}\right],$$

unde $Z = [I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2]^{1/2}$. Pentru a preciza care este punctul de maxim, respectiv minim, studiem semnul expresiei $Y''_{cr} = -\dfrac{I_{xx}}{I_{yy}Y - I_{xy}X} = -\dfrac{I_{xx}^2}{Y(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}$ şi observăm că $Y''(X_1) < 0$, deci abscisa punctului M_1 este un punct de maxim şi $Y''(X_2) > 0$, deci abscisa punctului M_2 este un punct de minim.

M e t o d a II. Vom scrie expresia (5.3') sub forma

$$I(\varphi) = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi \tag{5.6}$$

în care funcţia $\varphi \to I\ \varphi)$ este definită pe $(0,\pi)$. Pentru a găsi punctele critice ale funcţiei, anulăm derivata întîi, considerînd ca variabilă independentă pe 2φ:

$$I'(2\varphi) \equiv -\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\sin 2\varphi - I_{xy}\cos 2\varphi = 0,$$

de unde $\operatorname{tg} 2\varphi = -\dfrac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}$, care admite soluţiile

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \text{ şi } \varphi_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} + \frac{\pi}{2}.$$

Utilizînd pe I'', se poate arăta că φ_1 şi φ_2 sînt cele două direcţii pe care se realizează valorile extreme şi deci cele două axe ale elipsei de inerţie. Valorile extreme ale funcţiei I sînt

$$I_{max} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{1}{2}[(I_{xx} - I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2]^{1/2},$$

$$I_{min} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{1}{2}[(I_{xx} - I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2]^{1/2}.$$

Direcţiile pe care se obţin aceste valori se numesc *direcţii principale*, iar valorile extreme se numesc *momente principale de inerţie*.

b) Analog se pot determina semiaxele elipsoidului de inerţie ca direcţii principale ale momentului de inerţie din $\mathbb{R}^3$. Vom considera de data aceasta cazul discret. Fie un sistem de puncte A_i, în care sînt plasate puncte materiale de mase m_i. Momentul de inerţie al sistemului de puncte faţă de o dreaptă oarecare se defineşte prin expresia $I = \sum_i m_i d_i^2$,

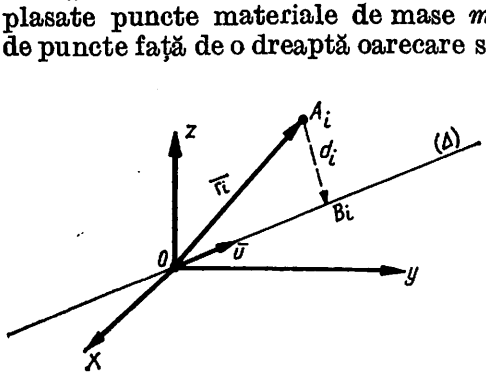


Fig. 5.13

unde d_i este distanţa de la punctul A_i la dreapta considerată. Fără să afectăm generalitatea problemei putem presupune că dreapta trece prin origine şi are versorul $\vec{u}$. Ne propunem să studiem variaţia funcţiei $\vec{u} \to I(\vec{u})$, adică să determinăm direcţiile pe care se obţin valorile extreme ale acestei funcţii. În triunghiul dreptunghic B_iOA_i (fig. 5.13) putem scrie relaţia $d_i^2 = r_i^2 - OB_i^2$, unde r_i este modulul vectorului de poziţie al punctului A_i. Segmentul OB_i este proiecţia lui r_i pe dreapta de versor $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ şi deci $OB_i = \vec{r_i} \cdot \vec{u} = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i$. Rezultă $d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2$, iar momentul de inerţie devine

$$I = \sum_i m_i [x_i^2 + y^2 + z_i^2 - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2 =$$

$$= \sum_i m_i [x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2 =$$

$$= \alpha^2 \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) + \beta^2 \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) +$$

$$+ \gamma^2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2\beta\gamma \sum_i m_i y_i z_i - 2\gamma\alpha \sum_i m_i z_i x_i - 2\alpha\beta \sum_i m_i x_i y_i,$$

unde se presupun cunoscute momentele de inerţie axiale

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

şi momentele de inerţie centrifugale

$$I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i, \quad I_{zx} = \sum_i m_i z_i x_i.$$

Deoarece $(\alpha,\beta,\gamma) \to I(\alpha,\beta,\gamma)$ este formă pătratică, teoremele din § 5.6. arată că valorile critice ale funcţiei I cu legătura $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ sînt valorile proprii ale matricei simetrice

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

Mai mult, extremele lui I sînt respectiv cea mai mică şi cea mai mare dintre valorile proprii ale acestei matrice.

5.8. Extremele funcţiilor armonice

Fie D un domeniu, adică o mulţime deschisă şi convexă din $\mathbb{R}^n$. O funcţie $f: D \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 se numeşte *funcţie armonică* pe D dacă satisface *ecuaţia lui Laplace*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Teoremă. *O funcţie f armonică pe D, care nu se reduce la o constantă, nu are extreme pe D. Cu alte cuinte, $\underline{f} < f(\mathrm{x}) < \bar{f}$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$, unde $\underline{f} = \inf\limits_{\mathrm{x}\in D} f(\mathrm{x})$, $\bar{f} = \sup\limits_{\mathrm{x}\in D} f(\mathrm{x})$.*

Demonstraţie. Presupunem că $\mathrm{x}_0 \in D$ este un punct de minim pentru f. Rezultă $df(\mathrm{x}_0) = 0$ şi există o vecinătate (convexă) U a lui x_0 astfel încît $d^2f(\mathrm{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x})\, dx_i dx_j \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in U$, adică $f/_U$ este convexă. Fie $\rho_1(\mathrm{x}), \ldots, \rho_n(\mathrm{x})$ valorile proprii ale matricei $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x})\right]$, $\mathrm{x} \in U$. Deoarece $\rho_1(\mathrm{x}) \geqslant 0, \ldots, \rho_n(\mathrm{x}) \geqslant 0$ şi $\rho_1(\mathrm{x}) + \ldots + \rho_n(\mathrm{x}) = \Delta f(\mathrm{x}) = 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in U$, rezultă $\rho_1(\mathrm{x}) = \ldots = \rho_n(\mathrm{x}) = 0$, $\forall \mathrm{x} \in U$. Astfel, $d^2f(\mathrm{x}) = 0$, $\forall \mathrm{x} \in U$ şi deci $df(\mathrm{x}) = \text{const}$ pe U. Aceasta împreună cu $df(\mathrm{x}_0) = 0$ implică $df(\mathrm{x}) = 0$, $\forall x \in U$, adică $f/_U$ ar trebui să fie o constantă. Dacă f este armonică, atunci şi $-f$ este tot armonică. De aici şi din cele precedente rezultă că f nu poate avea nici punct de maxim pe D.

Să presupunem că domeniul D este mărginit şi că f este continuă pe $D \cup \partial D$, unde ∂D este frontiera lui D. Deoarece $D \cup \partial D$ este o mulţime compactă (închisă şi mărginită), funcţia f are în $D \cup \partial D$ un minim şi un maxim. După teorema precedentă, aceste valori nu pot fi atinse în D, ci numai în ∂D.

Teoremă. *O funcţie f continuă pe $D \cup \partial D$ şi armonică pe D îşi atinge extremele pe frontiera lui D.*

Exemplu. Se consideră funcţia f definită prin $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ evident pentru $y \neq 0$. Domeniul ei de definiţie nu este conex fiind reuniunea dintre semiplanul superior şi semiplanul inferior (reuniunea a două mulţimi deschise şi conexe). Calcule directe conduc la

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

şi deci f este o funcţie armonică care nu posedă puncte critice.

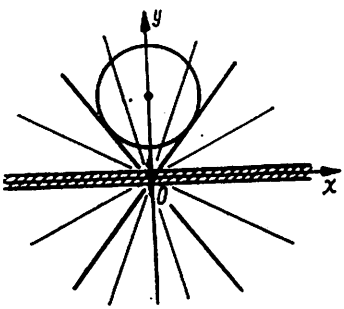


Fig. 5.14

Curbele de nivel constant ale lui f au ecuaţiile $x = y \operatorname{tg} f$, $y \neq 0$, fiind deci semidrepte deschise ce pleacă din origine, fără semidreptele din axa absciselor, (fig. 5.14).

Fie $f|_{\bar{D}}$ restricţia lui f la discul închis $\bar{D}: x^2 + (y-2)^2 \leq 1$. Valorile extreme ale funcţiei armonice $f|_{\bar{D}}$ vor fi date de pantele semidreptelor tangente la cercul $x^2 + (y-2)^2 = 1$ (fig. 5.14).

Notăm $m = \operatorname{tg} f$ şi alcătuim sistemul

$$x^2 + (y-2)^2 = 1, \qquad x = my, \quad y > 0.$$

Eliminînd pe x, găsim ecuaţia de gradul doi $(m^2+1)y^2 - 4y + 3 = 0$, căreia îi impunem condiţia să aibă rădăcină dublă, adică $4 - 3(m^2+1) = 0$. Găsim $m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $y = \frac{3}{2}$; corespunzător $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Astfel valorile extreme ale lui $f|_{\bar{D}}$ sînt date de $\operatorname{tg} f = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, adică $f_{min} = \frac{\pi}{6}$, respectiv $f_{max} = \frac{5\pi}{6}$ şi aceste valori sînt atinse în punctele $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{3}{2}$.

5.9. Principiul maximului pentru soluţiile ecuaţiei căldurii

Fie $\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f = 0$ ecuaţia căldurii şi $f: D \times (0, T] \to \mathbb{R}$ o soluţie de clasă C^2, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^n$, iar $(0, T]$ este un interval din $\mathbb{R}$. Fie ∂D frontiera lui D.

Teoremă. *Dacă $f: (D \cup \partial D) \times [0, T] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi soluţie nebanală de clasă C^2 a ecuaţiei căldurii pe $D \times (0, T]$, atunci f nu are maxim pe $D \times (0, T]$, ci într-un punct (x_0, t_0) pentru care $x_0 \in \partial D$ sau $t_0 = 0$. O afirmaţie analogă este valabilă pentru minimul funcţiei f.*

Demonstrație. Funcția $f:(D \cup \partial D) \times [0,T] \to \mathbb{R}$ admite un maxim, deoarece este continuă, iar domeniul de definiție este compact. Considerăm familia de funcții g_ε definită prin $g_\varepsilon(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar. Evident $\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon = f$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta g_\varepsilon = \Delta f$ și $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t} - \Delta g_\varepsilon = -2n\,\varepsilon < 0$.

Presupunem că $(\mathbf{x}_0, t_0) \in D \times (0,T]$ este un punct de maxim pentru funcția g_ε. Atunci $\mathbf{x}_0 \in D$ este un punct de maxim pentru funcția parțială $\mathbf{x} \to g_\varepsilon(\mathbf{x},t_0)$, iar $t_0 \in (0, T]$ este un punct de maxim pentru funcția parțială $t \to g_\varepsilon(\mathbf{x}_0,t)$. Rezultă

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0,t_0) = 0, \ldots, \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0, \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}_0,t_0) \geqslant 0, \mathrm{d}^2 g_\varepsilon(\mathbf{x}_0 t_0)(\mathrm{d}\mathbf{x}) \leqslant 0,$$

iar ultima inegalitate implică faptul că urma matricei $\left[\frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0, t_0)\right]$ este cel mult zero, adică $\Delta g_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0) \leqslant 0$. Se observă însă că relațiile $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t_0) \geqslant 0$, $\Delta g_\varepsilon(\mathbf{x}_0,t_0) \leqslant 0$, $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t} - \Delta g_\varepsilon = -2n\varepsilon < 0$ sînt contradictorii.

Raționamentul precedent arată că maximul lui g_ε și deci și maximul lui f nu poate fi atins într-un punct din $D \times (0, T]$. Rămîne că acest maxim este atins fie într-un punct cu $\mathbf{x}_0 \in \partial D$, fie într-un punct cu $t_0 = 0$.

5.10. Distanța de la un punct la o mulțime închisă

1. Fie A o mulțime închisă din spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{p}$ un punct oarecare din $\mathbb{R}^n$ și $\mathbf{q}$ un punct oarecare din A. Notăm cu $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ distanța dintre punctele $\mathbf{p}$ și $\mathbf{q}$. Marginea inferioară

$$d = d(\mathbf{p}, A) = \inf_{\mathbf{q}\in A} d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

se numește *distanța de la* $\mathbf{p}$ *la* A. Această definiție este corectă întrucît funcția $\mathbf{q} \to d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ este minorată de zero și orice mulțime de numere reale, nevidă și minorată admite un infimum. Avem $d(\mathbf{p}, A) \geqslant 0$ și $d(\mathbf{p}, A) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{p} \in A$. Cu alte cuvinte, dacă $\mathbf{p} \notin A$, atunci $d(\mathbf{p},A) > 0$. Într-adevăr, dacă n-ar fi așa, atunci orice bilă cu centrul în $\mathbf{p}$ ar conține cel puțin un element din A și astfel $\mathbf{p}$ ar fi un punct aderent al lui A. Dar A este închisă și deci $\mathbf{p} \in A$, ceea ce contrazice ipoteza.

Să demonstrăm că infimumul este un minim, adică $\exists\, \mathbf{q}_0 \in A$ astfel încît $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) = d(\mathbf{p}, A)$. Pentru aceasta, observăm că funcția $\mathbf{q} \to d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$,

$\mathbf{q} \in A$ este continuă pe A. Fie B o bilă închisă cu centrul în $\mathbf{p}$ şi de rază $d+1$. Deoarece B este compactă şi A este închisă, $B \cap A$ este compactă. Se ştie însă că o funcţie continuă $\mathbf{q} \to d(\mathbf{p},\mathbf{q})$ pe o mulţime compactă $B \cap A$ admite un minim, adică $\exists\, \mathbf{q}_0 \in B \cap A$ aşa ca $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) \leqslant d(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $\forall \mathbf{q} \in B \cap A$. Acestea implică $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q})|_{\mathbf{q} \in B \cap A} \leqslant d + 1 \leqslant d(\mathbf{p}, r)|_{r \in A-(B \cap A)}$, adică $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}_0) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q})|_{\mathbf{q} \in A}$.

Fie $\mathbf{p}(x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q}(x_1, \ldots, x_n) \in A$ cu A convexă şi $f = d^2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i0})^2$. Deoarece $\mathrm{d}^2 f = 2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i^2$ este pozitiv definită, funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este strict convexă. De aceea, dacă există, $\min\limits_{\mathbf{q} \in A} f$ este global.

Să arătăm că funcţia $\mathbf{p} \to d(\mathbf{p}, A)$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, este continuă, adică să dovedim că distanţa de la un punct la o mulţime închisă variază continuu în raport cu punctul. Pentru aceasta fie punctele $\mathbf{p}$ şi $\mathbf{p}'$ din $\mathbb{R}^n$. Deoarece $d(\mathbf{p},A)$ este o margine inferioară, există $\mathbf{q} \in A$ aşa ca $d(\mathbf{p},\mathbf{q}) \leqslant d(\mathbf{p},A) + \delta$, $\forall \delta > 0$. Rezultă $d(\mathbf{p}',\mathbf{q}) \leqslant d(\mathbf{p}',\mathbf{p}) + d(\mathbf{p},\mathbf{q}) \leqslant d(\mathbf{p}',\mathbf{p}) + d(\mathbf{p},A) + \delta$ şi deci $d(\mathbf{p}', A) \leqslant d(\mathbf{p}', \mathbf{q}) \leqslant d(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + d(\mathbf{p}, A) + \delta$, $\forall \delta > 0$, adică $d(\mathbf{p}', A) \leqslant d(\mathbf{d}', \mathbf{p}) + d(\mathbf{p}, A)$. Analog, $d(\mathbf{p}, A) \leqslant d(\mathbf{p}', A) + d(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ şi deci $|d(\mathbf{p}',A) - d(\mathbf{p}, A)| \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Astfel, $d(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \leqslant \varepsilon$ implică $|d(\mathbf{p}', A) - d(\mathbf{p}, A)| \leqslant \varepsilon$.

2. Fie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi suprafaţa $S : g(x, y, z) = 0$ ($\mathrm{d}g \neq 0$ pe S). Se poate arăta că suprafaţa S este o mulţime închisă în $\mathbb{R}^3$[32]. Pentru a găsi distanţa de la $\mathbf{p}(x_0, y_0, z_0)$ la suprafaţa S putem folosi extremele locale ale funcţiei (pătratul distanţei)

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

cu restricţia $g(x, y, z) = 0$. Conform raţionamentelor precedente, funcţia f posedă cel puţin un punct de minim pe S. De asemenea, ipoteza $\mathrm{d}g \neq 0$ arată că există în mod necesar un multiplicator al lui Langrage u astfel încît

$$x - x_0 = u \frac{\partial g}{\partial x}, \quad y - y_0 = u \frac{\partial g}{\partial y}, \quad z - z_0 = u \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Eliminînd pe u, punctul de extrem (x,y,z) satisface sistemul

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial g}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial g}{\partial z}}, \quad g(x,y,z) = 0.$$

Aceste ecuaţii exprimă faptul că punctul de extrem căutat este piciorul unei normale duse din $\mathbf{p}$ la suprafaţă.

Deoarece f posedă cel puţin un punct de minim pe S, rezultă că din $\mathbf{p}$ se poate duce cel puţin o normală la suprafaţa S. Dacă S este şi mărginită, deci compactă, atunci din $\mathbf{p}$ se pot duce cel puţin două normale la S, deoarece funcţia continuă f admite şi minim şi maxim pe S.

Exemplu. În particular, dacă S este un plan, adică $g(x, y, z) = ax + by + cz + d$, atunci u este unic determinat,

$$u = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2},$$

punctul de minim are coordonatele $x = x_0 + ua$, $y = y_0 + ub$, $z = z_0 + uc$ şi distanţa de la punctul $\mathbf{p}(x_0, y_0, z_0)$ la planul $S : ax + by + cz + d = 0$ are expresia $\sqrt{f(x, y, z)}$, adică

$$d(\mathbf{p}, S) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3. Fie $g,h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1. Curba $C : g(x,y,z) = 0$, $h(x,y,z) = 0$ (dg şi dh sînt liniar independente pe C) este o mulţime închisă în $\mathbb{R}^3$ [32].

Fie $\mathbf{p}(x_0,y_0, z_0)$ un punct dat. Pentru a găsi distanţa de la $\mathbf{p}$ la C putem folosi extremele funcţiei (pătratul distanţei)

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

cu restricţiile $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$. Din cele precedente rezultă că dacă problema este corect formulată, atunci f are cel puţin un punct de minim pe C. Cum diferenţialele dg şi dh sînt prin ipoteză liniar independente, există multiplicatorii Lagrange u şi v aşa ca

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= u\frac{\partial g}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial x} \\ y - y_0 &= u\frac{\partial g}{\partial y} + v\frac{\partial h}{\partial y} \\ z - z_0 &= u\frac{\partial g}{\partial z} + v\frac{\partial h}{\partial z} \\ g(x, y, z) = 0, &\quad h(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Aceste ecuaţii arată că punctul de extrem căutat este intersecţia dintre curba C şi un plan normal la C dus prin punctul $\mathbf{p}$. Deoarece f posedă cel puţin un punct de minim pe C, rezultă că din $\mathbf{p}$ se poate duce cel puţin un plan normal la curba C. Dacă C este şi mărginită, şi deci compactă, atunci din $\mathbf{p}$ se pot duce cel puţin două plane normale, deoarece funcţia continuă f admite şi minim şi maxim pe C.

Exemplu. Considerăm dreapta $D : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. şi punctul $\mathbf{p}(x_0, y_0, z_0)$. Deoarece prin $\mathbf{p}$ se poate duce un singur plan P perpendicular pe D, distanţa de la $\mathbf{p}$ la D este $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, unde $\{\mathbf{q}\} = P \cap D$.

5.11. Distanţa dintre două mulţimi închise

1. Fie A şi B două mulţimi închise din $\mathbb{R}^n$, fie $\mathbf{p}$ un punct oarecare din A şi $\mathbf{q}$ un punct oarecare din B. Distanţa de la $\mathbf{p}$ la $\mathbf{q}$ se notează cu $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Marginea inferioară $d = d(A,B) = \inf\limits_{\mathbf{p}\in A,\ \mathbf{q}\in B} d(\mathbf{p},\mathbf{q})$ se numeşte *distanţa de la A la B*.

Chiar dacă $A \cap B = \emptyset$, se poate întîmpla ca $d(A,B) = 0$, după cum ne putem convinge uşor luînd mulţimea A o hiperbolă din plan şi mulţimea B o asimptotă a hiperbolei. Acest exemplu dovedeşte şi faptul că în general $\inf\limits_{\mathbf{p}\in A,\ \mathbf{q}\in B} d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ nu este un minim. Mai mult, se observă că $d(A,B)=0$ dacă şi numai dacă A şi B au cel puţin un punct aderent comun; în caz contrar $d(A,B) > 0$.

Să arătăm că dacă A este compactă şi dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $d = d(A,B)$ este un minim strict pozitiv. Într-adevăr, $d = \inf\limits_{\mathbf{p}\in A} d(\mathbf{p},B)$, şi se ştie că $\mathbf{p} \to d(\mathbf{p},B)$ este o funcţie continuă; fiind strict pozitivă pe compactul A, aceasta admite un minim strict pozitiv, adică $\exists\, \mathbf{p}_0 \in A$ astfel încît $d = d(\mathbf{p}_0, B) > 0$. În plus, în baza unui raţionament din paragraful precedent $\exists\, \mathbf{q}_0 \in B$, aşa că $d = d(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = d(\mathbf{p}_0, B)$. Deci $d = d(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = d(A,B)$ este un minim.

Fie $\mathbf{p}(x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{q}(y_1,\ldots,y_n)$ şi $f = d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2$. Presupunem că A şi B sînt convexe. Atunci şi $A \times B$ este convexă. Mai mult, $\mathrm{d}^2 f = 2\sum\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{d}x_i - \mathrm{d}y_i)^2 \geqslant 0$ şi deci $f : A \times B \to \mathbb{R}$ este convexă. De aceea, dacă există min f, atunci acest minim este global. De exemplu, dacă A şi B sînt caracterizate prin ecuaţii sau inecuaţii liniare, atunci f admite un minim.

2. Fie g_1, g_2: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 şi suprafeţele S_1: $g_1(x, y, z)=0$ ($\mathrm{d}g_1 \neq 0$ pe S_1), $S_2 : g_2(x, y, z)=0$ ($\mathrm{d}g_2 \neq 0$ pe S_2). Pentru a găsi distanţa dintre suprafeţele S_1 şi S_2 putem să folosim extremele locale ale funcţiei $f(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ cu restricţiile $g_1(x, y, z) = 0$, $g_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Funcţia lui Lagrange ataşată acestei probleme este $L(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - u_1 g_1(x, y, z) - u_2 g_2(\xi, \eta, \zeta)$.

Condiţiile necesare de extrem sînt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2(x - \xi) - u_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2(y - \eta) - u_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2(z - \zeta) - u_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \text{(a)}, \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi} &= -2(x-\xi) - u_2 \frac{\partial g_2}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \eta} &= -2(y-\eta) - u_2 \frac{\partial g_2}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \zeta} &= -2(z-\zeta) - u_2 \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} = 0 \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

şi $g_1(x, y, z) = 0$, $g_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Dacă fixăm pe $\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta)$, atunci ecuaţiile (a) arată că $\min f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ este atins în piciorul unei normale duse din $\mathbf{q}$ la suprafaţa S_1; dacă fixăm punctul $\mathbf{p}(x, y, z)$, atunci relaţiile (b) arată că $\min f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ este atins în piciorul unei normale duse din $\mathbf{p}$ la suprafaţa S_2. Pe de altă parte, existenţa lui $\min\limits_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ implică existenţa lui $\min\limits_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ şi $\min\limits_{\mathbf{q}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. De aceea dacă există, minimul lui f este atins pentru un punct $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in S_1 \times S_2$ astfel încît dreapta $\mathbf{pq}$ să fie normala comună a celor două suprafeţe. Ţinînd seama şi de raţionamentele precedente, rezultă că dacă una dintre suprafeţele S_1, S_2 este compactă, atunci ele admit cel puţin o normală comună sau, echivalent, funcţia f admite un minim.

Exemplu. Să se afle distanţa dintre paraboloidul eliptic $S: z = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4}$ şi planul $P: x - y - 2z = 4$.

Rezolvare. Distanţa căutată este distanţa dintre planul P şi planul tangent la cvadrica S paralel cu planul P. Fie $x - y - 2z = \lambda$ ecuaţia fasciculului de plane paralele cu P. Determinăm pe λ astfel încît planul corespunzător să fie tangent la S, adică eliminînd pe z din sistemul $z = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4}$, $x - y - 2z = \lambda$, impunea ca ecuaţia obţinută $(x - 3)^2 + 3(y + 1)^2 = 12 - 6\lambda$ să reprezinte o dreaptă. Găsim $\lambda = 2$, iar $x = 3$, $y = -1$, $z = 1$ este punctul de tangenţă. Distanţa de la acest punct la planul P este distanţa căutată. Deci $d = \sqrt{6/3}$.

3. Fie $g_1, h_1, g_2, h_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ patru funcţii de clasă C^1 şi curbele C_1: $g_1(x, y, z) = 0$, $h_1(x, y, z) = 0$ (dg_1 şi dh_1 sînt liniar independente pe C^1), $C_2: g_2(x, y, z) = 0$, $h_2(x, y, z) = 0$ (dg_2 şi dh_2 sînt liniar independente pe C_2). Pentru a găsi distanţa dintre C_1 şi C_2 ne putem folosi de extremele funcţiei $f(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$ cu restricţiile $g_1(x, y, z) = 0$, $h_1(x, y, z) = 0$, $g_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $h_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Astfel sîntem conduşi la funcţia lui Lagrange

$$L(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 -$$

$$- u_1 g_1(x, y, z) - v_1 h_1(x, y, z) - u_2 g_2(\xi, \eta, \zeta) - v_2 h_2(\xi, \eta, \zeta).$$

Cu ajutorul acesteia obţinem condiţiile necesare de extrem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2(x - \xi) - u_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2(y - \eta) - u_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} - v_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2(z - \zeta) - u_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} - v_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \text{(c)},$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \xi} &= -2(x-\xi) - u_2\frac{\partial g_2}{\partial \xi} - v_2\frac{\partial h_2}{\partial \xi} = 0\\
\frac{\partial L}{\partial \eta} &= -2(y-\eta) - u_2\frac{\partial g_2}{\partial \eta} - v_2\frac{\partial h_2}{\partial \eta} = 0\\
\frac{\partial L}{\partial \zeta} &= -2(z-\zeta) - u_2\frac{\partial g_2}{\partial \zeta} - v_2\frac{\partial h_2}{\partial \zeta} = 0
\end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

și $g_1(x, y, z) = 0$, $h_1(x, y, z) = 0$, $g_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $h_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

Fixînd pe $\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta)$, ecuațiile (c) arată că $\min\limits_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ este atins în punctul în care planul normal dus din $\mathbf{q}$ la C_1 taie pe C_1; analog ecuațiile (d) arată că $\min\limits_{\mathbf{q}} f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ este atins în punctul de intersecție dintre C_2 și planul normal dus la C_2 din punctul $\mathbf{p}$. De aceea, dacă există, minimul lui f este atins pentru $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in C_1 \times C_2$ astfel încît dreapta $\mathbf{pq}$ să fie perpendiculara comună a celor două curbe.

Exemplu. Să se găsească distanța dintre două drepte oarecare D_1 și D_2 din $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Mai întîi vom arăta algebric că există o singură dreaptă D_3 care intersectează două drepte oarecare D_1 și D_2 după unghiuri drepte (perpendiculara comună-fig. 5.15). Pentru simplificare, alegem axa Ox să coincidă cu D_1. În această ipoteză D_1 are ecuațiile parametrice $x = r$, $y = 0$, $z = 0$. Presupunem că D_2 are ecuațiile parametrice $x = x_0 + sl$, $y = y_0 + sm$, $z = z_0 + sn$. Direcția lui D_1 este dată de vectorul $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, iar direcția lui D_2 de vectorul $\mathbf{b} = (l, m, n)$. Prin ipoteză $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sînt independenți. De aceea vectorul nenul $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -n\mathbf{j} + m\mathbf{k}$ dă direcția perpendiculară pe $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$. Fie $m_1(m_2)$ punctul curent pe D_1 (D_2). Puneam condiția $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2 = t\,\mathbf{n}$, adică $(x_0 + sl - r)\mathbf{i} + (y_0 + sm)\mathbf{j} + (z_0 + sn)\mathbf{k} = -tn\mathbf{j} + tm\mathbf{k}$. Rezultă sistemul $r - sl = x_0$, $sm + tn = y_0$, $sn - tm = z_0$. Deoarece determinantul sistemul este $-(m^2 + n^2) \neq 0$, găsim soluția unică r, s, t. Astfel există un singur punct $\mathbf{q} \in D_1$, un singur punct $\mathbf{p} \in D_2$ și un singur t astfel încît $\mathbf{pq} = t\mathbf{n}$. De aceea există o singură dreaptă $D_3 \equiv pq$ care intersectează pe D_1 și D_2 după unghiuri drepte.

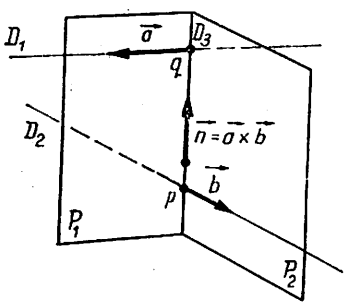


Fig. 5.15

Raționamentele precedente arată că distanța dintre $\mathbf{p}$ și $\mathbf{q}$ este distanța dintre dreptele D_1 și D_2. Evident $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |t| \cdot \|\mathbf{n}\|$.

5.12. Metoda verosimilității maxime

Fie X o variabilă aleatoare care are o funcție de repartiție a cărei densitate este funcția $(x, \theta) \to \rho(x, \theta)$.

Considerînd o selecție de volum n referitoare la variabila X, vom obține valorile $(x_1, \ldots, x_n)$ din spațiul de selecție care pot fi interpretate

ca valori luate de n variabile aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ independente, cu aceeaşi funcţie şi densitate de repartiţie ca şi X. În acest fel, densitatea de repartiţie a vectorului aleator $(X_1, \ldots, X_n)$ este funcţia

$$(\mathbf{x}, \theta) \to v(\mathbf{x}, \theta) = \rho(x_1, \theta) \ldots \rho(x_n, \theta) \text{ cu } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Probabilitatea ca $X_1, \ldots, X_n$ să ia valori în intervalele corespunzătoare $(x_1, x_1 + \Delta x_1; x_2, x_2 + \Delta x_2; \ldots; x_n, x_n + \Delta x_n)$ este dată de formula

$$P(x_i \in (x_i + \Delta x_i)) = \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i, \theta) \cdot \Delta x_i.$$

Metoda verosimilităţii maxime constă în faptul că se consideră drept estimator pentru θ acea valoare $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ care face ca probabilitatea indicată să ia cea mai mare valoare. Acest lucru este echivalent cu a considera ca estimator pentru θ acea valoare $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ pentru care funcţia $(x, \theta) \to v(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i, \theta)$ ia cea mai mare valoare, motiv pentru care această funcţie este numită *funcţie de verosimilitate.*

Odată găsit estimatorul pentru θ, adică valoarea $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$, făcînd o selecţie de volum n, vom determina valori experimentale ale variabilei aleatoare X. Acestea ne dau posibilitatea estimării parametrilor unei repartiţii, care pot avea semnificaţia unei medii, dispersii etc. a variabilei aleatoare X, devenind astfel complet specificată. Aşadar, estimatorul se va găsi printre punctele critice ale funcţiei parţiale de verosimilitate $\theta \to v(\mathbf{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i, \theta)$, sau echivalent printre punctele critice ale funcţiei parţiale $\theta \to \ln v(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln \rho(x_i, \theta)$, întrucît logaritmul natural este o funcţie strict crescătoare. Ecuaţia $\frac{\partial v}{\partial \theta}(\mathbf{x}, \theta) = 0$ sau $\frac{\partial \ln v}{\partial \theta}(\mathbf{x}, \theta) = 0$ poartă numele de *ecuaţia verosimilităţii.*

După verificarea condiţiilor suficiente de extrem, dacă există mai multe puncte critice, se vor căuta criterii de alegere a celui mai bun dintre estimatori.

Observaţie. Dacă densitatea de repartiţie depinde de mai mulţi parametri, raţionamentul precedent rămîne valabil, ecuaţia verosimilităţii înlocuindu-se cu sistemul verosimilităţii $\frac{\partial v}{\partial \theta_i}(\mathbf{x}, \theta) = 0$, $i = 1, \ldots, k$; $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$.

Vom aplica metoda verosimilităţii maxime pentru trei cazuri particulare, în care estimatorul ce rezultă este unic deoarece funcţiile de verosimilitate sînt funcţii unimodale (vezi § 2.3).

1) *Evaluarea estimatorului pentru parametrul* λ *dintr-o repartiţie de tip Poisson.* Presupunem o variabilă aleatoare X care are densitatea de repartiţie $\rho(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ Funcţia parţială de verosimilitate este $\lambda \to v(\mathrm{x}, \lambda) = e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)^{-1}$.

Fie $L(\lambda) = \ln v(\mathrm{x}, \lambda)$. Ecuaţia de verosimilitate $\frac{dL}{d\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ are soluţia $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Deoarece $\frac{d^2L}{d\lambda^2}(\hat{\lambda}) < 0$, punctul critic găsit este un punct de maxim. Astfel, estimatorul $\hat{\lambda}$ al lui λ nu este altceva decît valoarea medie a lui X.

2) *Evaluarea prin metoda verosimilităţii maxime a parametrului p din repartiţia binomială.* Fie x o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiţie dată de expresia $\rho(x, p) = p^x(1-p)^{1-x}$. În acest caz, funcţia parţială de verosimilitate este definită prin $v(\mathrm{x}, p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$, iar ecuaţia verosimilităţii $\frac{\partial \ln v}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - pn}{p(1-p)} = 0$ are soluţia $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Deoarece $\frac{\partial^2 \ln v}{\partial p^2}(\hat{p}) < 0$, punctul critic găsit este un punct de maxim şi deci un estimator pentru parametrul p.

3) *Evaluările prin metoda verosimilităţii maxime pentru media* μ *şi dispersia* σ^2 *din repartiţia normală.* Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiţie $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$. Sîntem în cazul estimării a doi parametri, funcţia parţială de verosimilitate fiind $(\mu, \sigma^2) \to v(x, \mu, \sigma^2) = (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$.

Fie $L(\mu, \sigma^2) = \ln v(x, \mu, \sigma^2)$. Sistemul verosimilităţii $\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\Sigma(x_i-\mu)^2}{\sigma^3} = 0$ are soluţia unică $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$. Deoarece $d^2L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ este pozitiv definită, punctul $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ este un punct de maxim şi deci $\hat{\mu}$ şi $\hat{\sigma}^2$ sînt estimatori pentru parametrii repartiţiei normale.

6

PROGRAMARE PĂTRATICĂ

6.1. Formularea generală a unui program pătratic

Fie spaţiul $\mathbb{R}^n$ şi funcţia reală definită prin

$$f(\mathbf{x}) = 2\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k, \text{ unde } c_{jk} = c_{kj}.$$

O problemă care constă în găsirea optimului lui f, pe $\mathbb{R}^n$ sau pe o submulţime din $\mathbb{R}^n$ caracterizată prin egalităţi sau inegalităţi liniare, se numeşte *problemă de programare pătratică* sau pe scurt *program pătratic.*

Orice problemă de programare pătratică poate fi formulată în felul următor : *să se găsească minimul funcţiei f cu restricţiile*

$$S : \sum_{j=1}^{n} a_{\alpha j} x_j \geqslant b_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r.$$

Într-adevăr, orice problemă de maxim se poate reduce la una de minim utilizînd relaţia $\max f = -\min(-f)$. De asemenea, inegalităţile de forma $\leqslant$ pot fi transformate în inegalităţi de forma $\geqslant$ prin înmulţire cu -1, iar egalităţile sînt respectiv echivalente cu cîte două inegalităţi $\geqslant$ şi $\leqslant$. Funcţia f se numeşte *funcţie obiectiv.* Mulţimea S este convexă şi se numeşte *hiperpoliedrul restricţiilor.*

Dacă notăm $\mathbf{c} = [c_1, \ldots, c_n]$, $\mathbf{x} =^t [x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbf{b} =^t [b_1, \ldots, b_n]$, $\mathbf{C} = [c_{jk}]$, $\mathbf{A} = [a_{\alpha j}]$, atunci entităţile precedente au scrierea matriceală $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{cx} +^t \mathbf{xCx}$, $\mathbf{Ax} \geqslant \mathbf{b}$.

Cele mai multe metode de rezolvare a unui program pătratic cer ca funcţia f să fie convexă (concavă) şi sînt de tip „gradient" [18, 34]. Există totuşi şi metode specifice pentru optimizarea funcţiilor pătratice nedefinite [18], dar acestea sînt de regulă lăsate în umbră pentru simplul motiv că majoritatea modelelor economice sînt bine descrise de funcţii convexe sau concave.

Să observăm că ecuația

$$2\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k = f \tag{6.1}$$

reprezintă un fascicul de hipercvadrice din $\mathbb{R}^n$. Acestea sînt hipercvadrice cu centru dacă și numai dacă rang $\mathbf{C}$ = rang $[\mathbf{C}, {}^t\mathbf{c}]$. Se știe că dacă fasciculul este format din hipercvadrice cu centru, atunci există o izometrie (translație + transformare ortogonală de axe) care reduce ecuația (6.1) la forma canonică

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_p x_p^2 + \gamma = f, \tag{6.2}$$

iar dacă fasciculul este format din hipercvadrice fără centru, atunci există o izometrie care reduce ecuația (6.1) la forma canonică

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_p x_p^2 + \beta x_{p+1} = f. \tag{6.3}$$

Ținînd seama și de faptul că izometria nu modifică proprietatea lui S de a fi convexă, ajungem la concluzia că orice program pătratic este echivalent cu min f, cu restricțiile $\mathbf{Dx} \geqslant \mathbf{e}$, unde f are una din expresiile (6.2) sau (6.3).

Precizăm că metodele de rezolvare a programelor pătratice se simplifică simțitor dacă mai întîi reducem funcția obiectiv la forma canonică.

Exemplu. Să se determine minimul funcției

$$\mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

cu restricțiile

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\alpha j} x_j = b_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, q, \text{ rang } [a_{\alpha j}] = q \leqslant n.$$

Rezolvare. Notînd $\mathbf{A} = [a_{\alpha j}]$, $\mathbf{x} = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbf{b} = {}^t[b_1, \ldots, b_q]$, avem $f = {}^t\mathbf{xx}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Determinantul produsului dintre o matrice și transpusa ei este pozitiv; acest determinant este strict pozitiv dacă matricea are rangul egal cu numărul liniilor sau cu numărul coloanelor sale. Deoarece

$$\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{x} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} [\mathbf{x}\ {}^t\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{xx} & {}^t\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{A} \\ \mathbf{Ax} & \mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A}) > 0, \quad \det \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{xx} & {}^t\mathbf{x}\,{}^t\mathbf{A} \\ \mathbf{Ax} & \mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A} \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

rezultă

$${}^t\mathbf{xx} \geqslant \frac{-\det \begin{bmatrix} 0 & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A} \end{bmatrix}}{\det(\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A})}. \tag{6.4}$$

Membrul al doilea din (6.4) este minimul lui $f = {}^t\mathbf{xx}$ întrucît această valoare se obține dacă alegem pe $\mathbf{x}$ astfel încît ${}^t\mathbf{x} = \mathbf{dA}$. Matricea $\mathbf{d}$ este unic determinată de restricții; într-adevăr, introducînd pe $\mathbf{x} = {}^t\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{d}$ în $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, găsim $(\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A})\,{}^t\mathbf{d} = \mathbf{b}$ și cum $\det(\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A}) > 0$, avem ${}^t\mathbf{d} = (\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$.

6.2. Programe pătratice în două variabile

Orice program pătratic în două variabile este echivalent cu min f, $S: a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 \geqslant b_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, unde $f(\mathrm{x})$ are una dintre expresiile

$$f(\mathrm{x}) = \alpha(x_1^2 + x_2^2),\ f(\mathrm{x}) = \alpha^2 x_1^2 + \beta^2 x_2^2,\ f(\mathrm{x}) = \alpha^2 x_1^2 - \beta^2 x_2^2,$$
$$f(\mathrm{x}) = \alpha x_2^2 + \beta x_1,\ f(\mathrm{x}) = \alpha^2 x_1^2.$$

Din programele pătratice în două variabile, cel mai simplu de rezolvat este programul: *să se determine optimul funcției* $f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2$, *cu restricțiile* S: $a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 \geqslant b_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$. Într-adevăr, în ipoteza $f > 0$, ecuația $x_1^2 + x_2^2 = f$ reprezintă o familie de cercuri concentrice cu centrul în origine. Altfel spus, f reprezintă pătratul distanței dintre $O(0, 0)$ și $M(x_1, x_2)$. Rezultă că f este extrem cînd distanța $d(O, M)$ este extremă. Dacă $O(0, 0) \in S$ (fig. 6.1), atunci $\min f = 0$. Apoi calculăm valorile lui f în vîrfurile lui S și, comparînd aceste valori găsim $\max f$.

Presupunem că $O(0, 0) \notin S$ (fig. 6.2). Dacă există laturi ale poligonului S cu proprietatea că perpendiculara dusă pe ele din O nu cade pe prelungiri atunci comparînd pătratele distanțelor de la O la aceste

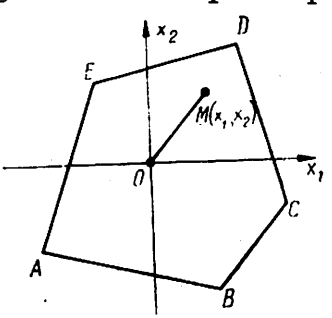


Fig. 6.1.

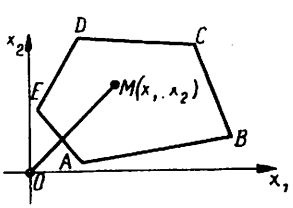


Fig. 6.2.

drepte obținem $\min f$; dacă nici o latură nu are această proprietate atunci $\min f$ se obține comparînd valorile lui f în vîrfuri. Bineînțeles aceste comparații ne dau și pe $\max f$.

Pe scurt, în ambele cazuri soluția optimă (dacă există) este reprezentată de un singur punct comun frontierei lui S și unui cerc din familia de cercuri concentrice cu centrul în origine.

6.3. Condițiile Kuhn-Tucker

Problemele concrete (economice, industriale etc.) care conduc la programe pătratice impun următoarea formulare; *să se găsească minimul lui* $f(\mathrm{x}) = 2\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}x_j x_k$ *cu restricțiile* S: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Să introducem funcţia lui Lagrange $L = f - \sum_{i=1}^{m} y_i g_i$, unde $g_i(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \geqslant 0$. Cu ajutorul ei putem scrie condiţiile Kuhn-Tucker:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \geqslant 0,\ x_j \geqslant 0,\ x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} \leqslant 0,\ y_i \geqslant 0,\ y_i \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

adică

$$2c_j + 2\sum_k c_{jk}x_k - \sum_i y_i a_{ij} \geqslant 0,\ x_j \geqslant 0,\ x_j(2c_j + 2\sum_k c_{jk}x_k - \sum_i y_i a_{ij}) = 0,$$

$$\sum_j a_{ij}x_j - b_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0,\ y_i(\sum_j a_{ij}x_i - b_i) = 0, \tag{6.5}$$

care sînt condiţii necesare pentru programul min f, cu restricţiile $g_i(\mathrm{x}) \geqslant 0$, $x_j \geqslant 0$. Aceste condiţii sînt şi suficiente pentru un minim global dacă f este convexă, adică dacă matricea $[c_{jk}]$ este pozitiv semidefinită.

Se observă că expresia L poate fi scrisă în forma

$$L = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk}x_j x_k - \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - 2\sum_{k=1}^{n} c_{jk}x_k - 2c_j \right).$$

Dar aceasta este funcţia lui Lagrange ataşată unui alt program pătratic: să se găsească maximul funcţiei $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk}x_j x_k$ cu restricţiile

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \leqslant 2c_j + 2\sum_{k=1}^{n} c_{jk}x_k, \quad x_j \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0.$$

Programele pătratice precedente se numesc *duale unul altuia*.

Condiţiile Kuhn-Tucker corespunzătorare programului dual sînt aceleaşi cu cele ataşate programului iniţial dar, spre deosebire de cazul programelor liniare, programul pătratic dual conţine atît variabilele x_j din programul iniţial cît şi variabilele duale y_i. Mai mult, unii algoritmi de rezolvare a unui program pătratic se bazează pe forma particulară, liniar afină, a membrilor întîi a patru grupuri dintre relaţiile (6.5) şi natura combinatorială a celorlalte două.

6.1. Planul de producţie al unei uzine care produce două tipuri de produse trebuie să satisfacă următoarele cerinţe: 1) cantităţile de produse finite să nu depăşească 5 t şi respectiv 3t; 2) cantitatea din primul produs să reprezintă cel mult dublul cantităţii din al doilea produs;

3) pentru fiecare tonă de produs finit se consumă 3 t, respectiv 2 t de materie primă; disponibilul de materie primă este de cel puţin 12 t; 4) dacă x_1, x_2 reprezintă numărul de tone din primul produs, respectiv al doilea, atunci o tonă din primul produs costă $2(x_1 + 1)$ milioane lei, iar o tonă din al doilea produs costă $x_2 - 2$ milioane lei. Să se găsească planul de producţie corespunzător unui cost minim.

Rezolvare. Restricţiile impuse planului de producţie sînt $x_1 < 5$, $x_2 < 3$, $x_1 < 2x_2$, $3x_1 + 2x_2 \geqslant 12$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ultimele două fiind consecinţe ale primelor patru; costul are expresia $f(\mathbf{x}) = 2(x_1 + 1)\, x_1 + (x_2 - 2)x_2$. Problema se reduce la găsirea minimului lui f pe mulţimea punctelor din plan ale căror coordonate satisfac restricţiile precedente.

Trasăm dreptele $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_1 = 2x_2$, $3x_1 + 2x_2 = 12$. Apoi ţinem seama de regiunile în care aceste drepte împart planul şi astfel obţinem poligonul restricţiilor $ABCD$ (fig. 6.3).

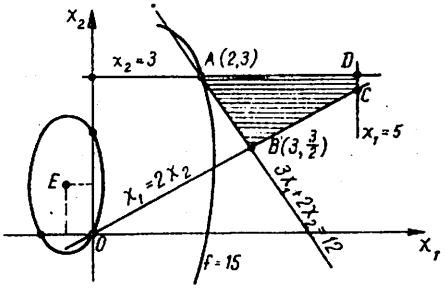


Fig. 6.3.

Se observă că ecuaţia $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = f$, adică

$$\frac{\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(x_2 - 1)^2}{1} = \frac{3}{2} + f$$

reprezintă o familie de elipse cu centrul în punctul $E: x_1 = -1/2$, $x_2 = 1$. Se poate verifica uşor că în familia de elipse există numai o elipsă tangentă la dreapta $AB: 3x_1 + 2x_2 = 12$ şi anume elipsa corespunzătoare lui $f = \frac{239}{17}$, punctul de tangenţă fiind $\left(\frac{26}{17}, \frac{63}{17}\right)$. Într-adevăr tangenta la elipsă în-r un punct (u, v) de pe elipsă se obţine prin dedublare, $(2u + 1)\, x_1 + (v - 1)\, x_2 = f + v - u$. Aceasta se confundă cu dreapta AB dacă şi numai dacă $\frac{2u + 1}{3} = \frac{v - 1}{2} = \frac{f + v - u}{12}$. Ţinînd însă seama că $\frac{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2}{1/2} + \frac{(v - 1)^2}{1} = \frac{3}{2} + f$, rezultă punctul de tangenţă $u = \frac{26}{17}$, $v = \frac{63}{17}$, dar acest punct se află în afara segmentului AB (pe dreapta AB, deasupra lui A). Elipsa care trece prin A corespunde la $f = 15$, iar elipsa care trece prin B corespunde la $f = \frac{93}{4} > 15$. Toate celelalte elipse care intersectează poligonul $ABCD$ se bucură de proprietatea $f > 15$. Deci soluţia optimă este $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $\min f = 15$.

Funcţia Lagrange ataşată exemplului precedent este

$$L = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - y_1(5 - x_1) - y_2(3 - x_2) - y_3(2x_2 - x_1) - y_4(3x_1 + 2x_2 - 12).$$

Condiţiile Kuhn-Tucker sînt

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 2 + y_1 + y_3 - 3y_4 \geqslant 0, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_1(4x_1 + 2 + y_1 + y_2 - 3y_4) = 0,\\
&2x_2 - 2 + y_2 - 2y_3 - 2y_4 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_2(2x_2 - 2 + y_2 - 2y_3 - 2y_4) = 0,\\
&5 - x_1 \geqslant 0, \quad y_1 \geqslant 0, \; y_1(5 - x_1) = 0,\\
&3 - x_2 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0, \; y_2(3 - x_2) = 0,\\
&2x_2 - x_1 \geqslant 0, \quad y_3 \geqslant 0, \; y_3(2x_2 - x_1) = 0,\\
&3x_1 + 2x_2 - 12 \geqslant 0, \; y_4 \geqslant 0, \; y_4(3x_1 + 2x_2 - 12) = 0.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Soluția obținută din considerente geometrice. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, conduce la $y_1 = 0$, $y_3 = 0$, $10 - 3y_4 = 0$, $4 + y_2 - 2y_4 = 0$ adică $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{8}{3}$, $y_3 = 0$, $y_4 = \frac{10}{3}$. Mai mult, această soluție reprezintă un minim global deoarece funcția obiectiv este convexă.

Programul dual corespunzător programului dat este max $(-5y_1 - 3y_2 + 12y_4 - 2x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2)$ cu restricțiile

$$-y_1 - y_3 + 3y_4 \leqslant 4 + 4x_1, \quad -y_2 + 2y_3 + 2y_4 \leqslant -4 + 2x_2; \quad x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \geqslant 0.$$

6.4. Soluție combinatorială

6.4.1. Presupunem că f este convexă. În această ipoteză, condițiile Kuhn-Tucker (6.5) sînt necesare și suficiente pentru ca o soluție posibilă a programului pătratic să fie și o soluție optimă. Ele nu dau însă nici o indicație directă referitoare la aflarea soluției optime. Totuși, în cazul cînd avem un număr relativ mic de variabile putem rezolva relațiile (6.5) utilizînd natura combinatorială a condițiilor $x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ și $y_i \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0$: sau x_j sau $\frac{\partial L}{\partial x_j}$ sau amîndouă se pot anula și sau y_i sau $\frac{\partial L}{\partial y_i}$ sau amîndouă se pot anula. Într-adevăr, dacă facem ipoteza că unele dintre variabilele x_j și y_i sînt strict pozitive, atunci ecuațiile liniare $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ și $\frac{\partial L}{\partial y_i} = 0$ dau restul variabilelor și nu avem decît să controlăm dacă toate condițiile sînt satisfăcute; dacă nu sînt, atunci alegem alte variabile stricte pozitive ș.a.m.d.

Pentru exemplificare să considerăm din nou problema din 6.1, min $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$ cu restricțiile $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 3$, $x_1 \leqslant 2x_2$, $3x_1 + 2x_2 \geqslant 12$. Deoarece f este convexă, existența minimului global este asigurată. Să găsim soluția pornind de la condițiile Kuhn-Tucker (§6.3). Presupunem $y_1 > 0$, $y_2 > 0$. Din $5 - x_1 = 0$, $3 - x_2 = 0$ rezultă $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, iar din $y_3(2x_2 - x_1) = 0$, $y_4(3x_1 + 2x_2 - 12) = 0$ găsim $y_3 = 0$, $y_4 = 0$. Acestea însă nu verifică $x_1(4x_1 + 2 + y_1 + y_3 - 3y_4) = 0$. Deci ipoteza este falsă.

Să presupunem că $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Acestea implică $4x_1 + 2 + y_1 + y_3 - 3y_4 = 0$, $2x_2 - 2 + y_2 - 2y_3 - 2y_4 = 0$. Dacă impunem și $y_2 > 0$, $y_4 > 0$, deducem $x_2 = 3$, $3x_1 + 2x_2 - 12 = 0$ sau $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ și apoi $y_1 = 0$, $y_3 = 0$, $y_2 = 8/3$, $y_4 = 10/3$. Constatăm că $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 8/3$, $y_3 = 0$, $y_4 = 10/3$ verifică toate condițiile și deci este o soluție optimă.

Celelalte posibilități se tratează analog, dar nu obținem decît contradicții.

Dacă numărul variabilelor și restricțiilor este mare, atunci numărul combinațiilor posibile este foarte mare și procedeul de mai sus este practic inaplicabil cel puțin manual.

6.4.3. Un program neliniar care are soluție ar putea fi rezolvat prin metoda multiplicatorilor lui Lagrange dacă am ști dinainte care restricții sînt active și care nu. În general, însă nu se știe nimic despre felul în care restricțiile inegalități intervin efectiv în determinarea soluției optime. De aceea dacă dorim să aplicăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange, trebuie să încercăm toate variantele posibile, reducînd soluționarea pro-

gramului inițial la o succesiune de programe. Mai întîi, se cercetează dacă extremul liber convine sau nu. Apoi, pentru o combinație de restricții ipotetic active se construiește funcția lui Lagrange, utilizînd funcția obiectiv și funcțiile provenite din membrii întîi ai restricțiilor active; se află punctele critice ale funcției Lagrange. Cazurile care conduc la puncte critice ce nu verifică restricțiile inactive se exclud; cele rămase dau soluții posibile pentru programul inițial. Soluția care dă cea mai mică sau cea mai mare valoarea a lui f și care satisface restricțiile inactive este soluția optimă căutată.

În exemplul precedent punctul de minim poate fi în interiorul sau pe laturile poligonului $ABCD$. Dacă el ar fi în interior, atunci toate restricțiile n-ar fi active; dacă el ar fi un un punct de pe o latură a poligonului $ABCD$, atunci cel puțin una dintre restricții ar fi activă. De aceea, în acest caz particular, avem de examinat toate cazurile cu 0,1 și 2 restricții active. Deoarece inegalitățile $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ se exclud, acestea fiind consecințe ale celorlalte, rămîn 11 posibilități:

— nici o inegalitate activă,

— patru cazuri cu cîte o inegalitate activă,

— șase posibilități cu cîte două restricții active.

Cazul 1. Să presupunem că nici o restricție nu este activă. Din $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 = 0$ aflăm punctul critic $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1$. Deoarece $x_1 < 0$, această soluție se exclude.

Cazul 2. Să presupunem că restricția $x_1 \leqslant 2x_2$ este activă adică $2x_2 - x_1 = 0$. Construim funcția lui Lagrange $L = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - u(2x_2 - x_1)$ și apoi găsim punctele critice ale acestei funcții. Acestea sînt soluțiile sistemului

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + 2 + u = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 - 2u = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u} = x_1 - 2x_2 = 0.$$

Găsim $x_1 = -2/9$, $x_2 = -1/9$, $u = -10/9$. Această soluție se exclude deoarece x-șii sînt strict negativi.

Cazul 3. Presupunem $5 - x_1 = 0$. Avem $L = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - u(5 - x_1)$. Punctul critic a lui L este $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $u = -22$. Soluția se elimină deoarece $x_1 > 2x_2$.

Cazul 4. Dacă $3 - x_2 = 0$, atunci $L = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - u(3 - x_2)$ și punctul critic al lui L este $x_1 = -1/2$, $x_2 = 3$, $u = -4$. Acest caz nu convine deoarece $x_1 < 0$.

Cazul 5. Fie $3x_1 + 2x_2 - 12 = 0$. Funcția $L = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - u(3x_1 + 2x_2 - 12)$ are punctul critic $x_1 = 67/34$, $x_2 = 63/17$, $u = 46/17$. Această contrazice inegalitatea $x_2 \leqslant 3$.

Cazul 6. Fie $2x_2 - x_1 = 0$, $5 - x_1 = 0$. Avem $L = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - u_1(2x_2 - x_1) - u_2(5 - x_1)$. Evident $x_1 = 5$, $x_2 = 5/2$ și celelalte coordonate ale punctului critic al lui L sînt $u_1 = 3/2$, $u_2 = -47/2$. De asemenea valoarea lui f este $f = 245/4$. Aceasta este o soluție posibilă.

Cazul 7. Presupunem $2x_2 - x_1 = 0$, $3 - x_2 = 0$, adică $x_1 = 6$, $x_2 = 3$. Deoarece $x_1 > 5$, acest caz se elimină.

Cazul 8. Dacă $2x_2 - x_1 = 0$, $3x_1 + 2x_2 - 12 = 0$, atunci $x_1 = 3$, $x_2 = 3/2$. Celelalte coordonate ale punctului critic al lui $L = f - u_1(2x_2 - x_1) - u_2(3x_1 + 2x_2 - 12)$ sînt $u_1 = -25/8$, $u_2 = 29/8$. De asemenea $f = 93/4$. Aceasta este o soluție posibilă.

Cazul 9. Fie $5 - x_1 = 0$, $3 - x_2 = 0$. Celelalte coordonate ale punctului critic al lui $L = f - u_1(5 - x_1) - u_2(3 - x_2)$ sînt $u_1 = -22$, $u_2 = -4$, iar $f = 64$. Și aceasta este o soluție posibilă.

Cazul 10. Fie $5 - x_1 = 0$, $3x_1 + 2x_2 - 12 = 0$, adică $x_1 = 5$, $x_2 = -3/2$. Deoarece $x_2 < 0$, acest caz trebuie eliminat.

Cazul 11. Fie $3 - x_2 = 0$, $3x_1 + 2x_2 - 12 = 0$, adică $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Celelalte coordonate ale punctului critic al lui $L = f - u_1(3 - x_2) - u_2(3x_1 + 2x_2 - 12)$ sînt $u_1 = 8/3$, $u_2 = 10/3$, iar $f = 15$. Evident, aceasta este o soluție posibilă.

Comparînd rezultatele obținute în cazurile 6, 8, 9,11, care corespund vîrfurilor patrulaterului $ABCD$, constatăm că minimul lui f este 15 care se realizează în punctul $A(2,3)$.

6.4.3. După cum am văzut, algoritmul precedent începe prin determinarea minimului liber al lui f. Dacă punctul găsit satisface toate restricțiile, atunci problema este rezolvată. Dacă nu, atunci se trece la găsirea minimului lui f presupunînd că avem o restricție activă ș.a.m.d. Evident un asemenea procedeu ar fi mai eficient dacă am avea și un criteriu de oprire, adică un test de optimalitate care să ne scutească eventual de trecerea în revistă a tuturor variantelor posibile. În cazul nostru un astfel de criteriu derivă din condițiile Kuhn-Tucker : o soluție corespunzătoare unor inegalități ipotetic active este optimală dacă satisface inegalitățile inactive și dacă multiplicatorii lui Lagrange corespunzători restricțiilor active sînt pozitivi. Dar eficiența acestui criteriu depinde evident de ordinea în care considerăm diferitele situații. De aceea dacă este posibil, euristic, se determină o anumită ordine pentru încercări și dacă se găsește o soluție posibilă, atunci nu se mai caută decît soluții care îmbunătățesc valoarea funcției obiectiv.

Soluția $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $f = 15$, $u_1 = 8/3$, $u_2 = 10/3$ satisface criteriul precedent. De asemenea observăm că aceasta satisface și condițiile Kuhn-Tucker (6.3) pentru $y_1 = 0$, $y_2 = u_1 = 8/3$, $y_3 = 0$, $y_4 = u_2 = 10/3$. Aceasta înseamnă de fapt că soluția găsită în cazul 11 este și soluția problemei inițiale. Constatăm totuși că ordinea pentru cele 11 cazuri a făcut complet inutil criteriul de oprire.

Dacă numărul variabilelor și al restricțiilor este mare, atunci metoda precedentă devine ineficientă cel puțin pentru o rezolvare manuală.

6.5. Metoda gradientului proiectat

Pentru rezolvarea unui program pătratic în care funcția obiectiv este convexă se poate aplica cu succes metoda gradientului proiectat [18]. Vom aplica *algoritmul Marusciac—Rădulescu* deoarece simplifică iterațiile.

Presupunem că funcția $f = 2\mathbf{c}\mathbf{x} + {}^t\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}$ este convexă și că avem de rezolvat programul : $\min f$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b}$. Notăm cu S hiperpoliedrul restricțiilor și reamintim că un vector nenul cu proprietatea că o deplasare mică după direcția și sensul lui nu modifică restricțiile se numește *vector admisibil*. De asemenea este util să transcriem restricțiile $\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b}$ în forma $\mathbf{a}_\alpha\mathbf{x} \geqslant b_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, unde $\mathbf{a}_\alpha = [a_{\alpha 1}, \ldots, a_{\alpha n}]$, $\mathbf{x} = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$.

Algoritmul porneşte prin explicitarea lui $\nabla f = 2\mathbf{c} + 2\mathbf{C}\mathbf{x}$ şi alegerea unui punct iniţial $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1}) \in S$. Se calculează $\nabla f(\mathbf{x}_1)$. Dacă $\nabla f(\mathbf{x}_1) = 0$, atunci $\mathbf{x}_1$ este punctul de minim. În caz contrar se continuă; iteraţia de ordinul k se face în felul următor:

1) Se calculează $\nabla f(\mathbf{x}_k)$, unde $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, \ldots, x_{nk}) \in S$. Dacă $\nabla f(\mathbf{x}_k) = 0$, atunci $\mathbf{x}_k$ este punctul de minim căutat; în caz contrar se continuă.

2) Dacă $-\nabla f(\mathbf{x}_k)$ este un vector admisibil, atunci de la punctul $\mathbf{x}_k$ se trece la punctul $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \rho_k \nabla f(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{x}_{k+1} = (x_{1,k+1}, \ldots, x_{n,k+1}) \in S$, $\rho_k > 0$.

Numărul $\rho_k > 0$ se determină din condiţiile $\mathbf{x}_{k+1} \in S$, $f(\mathbf{x}_{k+1}) < f(\mathbf{x}_k)$, adică este acel $\rho > 0$ care minimizează pe $f(\mathbf{x}_k - \rho\nabla f(\mathbf{x}_k))$ în raport cu restricţia $\mathbf{x}_k - \rho\nabla f(\mathbf{x}_k) \in S$. Deci este suficient să determinăm acei ρ strict pozitivi pentru care se realizează minimul funcţiei $f(\mathbf{x}_k - \rho\nabla f(\mathbf{x}_k))$ şi pe acel ρ strict pozitiv pentru care $\mathbf{x}_k - \rho\nabla f(\mathbf{x}_k) \in \partial S$, iar apoi să alegem drept ρ_k pe cel mai mic dintre numerele găsite.

3) Dacă $-\nabla f(\mathbf{x}_k)$ nu este un vector admisibil, lucru ce se poate întîmpla numai cînd $\mathbf{x}_k \in \partial S$, atunci se precizează toate hiperplanele care trec prin $\mathbf{x}_k$; să zicem că acestea sînt $\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $p \leqslant n$. Proiectăm $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ pe hiperplanul $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1$ şi notăm proiecţia cu $\mathbf{s}_1$. Dacă $-\mathbf{s}_1$ este un vector admisibil, atunci de la $\mathbf{x}_k$ se trece la $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \rho_k\mathbf{s}_1$, $\mathbf{x}_{k+1} \in S$, unde ρ_k se determină ca mai sus. În caz contrar se trece la proiecţia pe hiperplanul $\mathbf{a}_2\mathbf{x} = b_2$ pentru care se procedează la fel.

Dacă nici una dintre proiecţiile precedente nu convine, atunci se trece la proiecţia gradientului $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ pe muchia comună hiperplanelor $\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Se demonstrează că această proiecţie este sau un vector admisibil sau vectorul nul. În cazul vectorului admisibil se continuă; în cazul vectorului nul, $\mathbf{x}_k$ este punctul de minim.

Observaţii. 1) Se întîlnesc situaţii cînd algoritmul precedent are o infinitate de paşi. Acestea se recunosc prin faptul că pentru $k > k_0$ toate iteraţiile se găsesc într-o muchie. Cînd se constată acest lucru, se întrerupe algoritmul şi se trece la găsirea minimului cu metoda lui Lagrange, legăturile fiind ecuaţiile ce determină muchia respectivă.

2) Prin proiecţia lui $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ pe un plan $\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i$, i fiind fixat, înţelegem un vector $\mathbf{s}_k$ (fig. 6.4) dat de relaţia $\mathbf{s}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k) + \lambda\mathbf{a}_i$, unde

$$\lambda = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_k)\cdot {}^t\mathbf{a}_i}{\mathbf{a}_i\,{}^t\mathbf{a}_i}.$$

Formule analoge se dau şi pentru proiecţia pe o muchie [18].

6.2. Să se găsească minimul funcţiei $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 8x_2$ cu restricţiile $5x_1 + 8x_2 \geqslant 36$, $x_1, x_2 \geqslant 0$.

Mai întîi observăm că $f = (x_1 + 1)^2 + 2(x_2 + 2)^2 - 9$, iar ecuaţia $\frac{(x_1 + 1)^2}{1} + \frac{(x_2 + 2)^2}{1/2} = 9 + f$ reprezintă (fig. 6.5) o familie de elipse cu centrul în punctul $C(-1, -2)$. Minimul lui f este atins în punctul de tangenţă $P_3(4,2)$, pentru care $f = 48$. Partea haşurată din figură reprezintă poligonul restricţiilor. În acest poligon alegem punctul P_1 de coordonate $x_{11} = 3$, $x_{21} = 3$ în care $f = 57$. Ţinînd seama că grad $f = (2x_1 + 2)\mathbf{i} + (4x_2 + 8)\mathbf{j}$, găsim grad $f(3, 3) = 8\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$. Evident $-8\mathbf{i} - 20\mathbf{j}$ este un vector admisibil. Punem $x_{12} = 3 - 8\rho_1$, $x_{22} = 3 - 20\rho_1$. Formăm expresia $\varphi(\rho_1) = f(x_{12}, x_{22}) = (4 - 8\rho_1)^2 + 2(5 - 20\rho_1)^2 - 9$ şi constatăm

că $\rho_1^0 = 43/116$ este punctul de minim al funcției φ; punem condiția ca (x_{12}, x_{22}) să aparțină lui AB, adică $5(3 - 8\rho_1) + 8(3 - 20\rho_1) = 36$ și găsim $\rho_1^1 = 3/200$. Deoarece $\rho_1^1 < \rho_1^0$, ne folosim de ρ_1^1 (dealtfel ρ_1^0 conduce la $x_{21} < 0$, ceea ce contrazice restricțiile). Astfel, de la

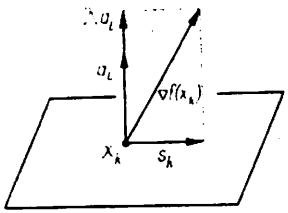


Fig. 6.4.

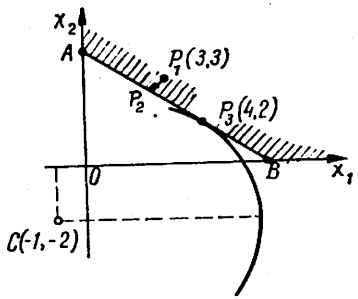


Fig. 6.5.

punctul $x_{11} = 3$, $x_{21} = 3$ am trecut la punctul P_2 de coordonate $x_{12} = \frac{72}{25}$, $x_{22} = \frac{27}{10}$ și $f(P_2) = \left(\frac{97}{25}\right)^2 + 2\left(\frac{47}{10}\right)^2 - 9$.

Observăm că grad $f\left(\frac{72}{25}, \frac{27}{10}\right) = \frac{194}{25}\mathbf{i} + \frac{94}{5}\mathbf{j}$ și evident $-$grad $f\left(\frac{72}{25}, \frac{27}{10}\right)$ nu mai este un vector admisibil; de aceea aflăm proiecția sa pe dreapta AB. Deoarece $5\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ este un vector normal la AB, vectorul $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ din egalitatea $\frac{194}{25}\mathbf{i} + \frac{94}{5}\mathbf{j} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \lambda(5\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$ este **proiecția căutată.**

Înmulțind scalar cu $5\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ și ținînd seama că $5a + 8b = 0$, găsim $\lambda = \frac{946}{445}$. Deci $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \frac{798}{2225}(-8\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$. Acest vector ne ajută să trecem de la P_2 la P_3: $x_{13} = \frac{72}{25} + \frac{8}{5}u$, $x_{23} = \frac{27}{10} - u$, unde $u = \frac{798}{445}\rho_2$. Valoarea lui f în acest punct este $f(x_{12}, x_{22}) = \left(\frac{97}{25} + \frac{8}{5}u\right)^2 + 2\left(\frac{47}{10} - u\right)^2 - 9$. Punctul de minim al lui $u \to f(u)$ este dat de $\frac{1}{2}\frac{df}{du} = \left(\frac{97}{25} + \frac{8}{5}u\right)\frac{8}{5} - 2\left(\frac{47}{10} - u\right) = 0$. Găsim $u = \frac{133}{190}$ și deci P_3 are coordonatele $x_{13} = 4$, $x_{23} = 2$, iar $f(P_3) = 48$.

În final observăm că grad $f(P_3) = 10\mathbf{i} + 16\mathbf{j} = 2(5\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$. Deoarece $-$ grad $f(P_3)$ nu este un vector admisibil, dar grad $f(P_3) \perp AB$, rezultă că P_3 este punctul de minim căutat.

6.6. Aplicații ale programării pătratice

Programele pătratice diferă de cele liniare numai prin tipul funcției obiectiv. De aceea este firesc ca problemele concrete rezolvabile prin programe pătratice să fie în principiu din aceeași arie cu cele rezolvabile prin programele liniare.

6.3. *Probleme de planificare.* O întreprindere trebuie să stabilească planul de producţie, pentru o marfă, pe fiecare trimestru al unui an. Pentru aceasta se estimează următoarele vînzări v_t:

t	v_t (unităţi)	v_t, cumulate
1	a	$\alpha = a$
2	b	$\beta = a + b$
3	c	$\gamma = a + b + c$
4	d	$\delta = a + b + c + d$

Stocul iniţial este $s_0 = 0$; stocul s_t la sfîrşitul trimestrului trebuie să fie nenegativ. Notăm cu x_t producţia din trimestrul t; costul producţiei şi costul depozitării pe un trimestru sînt respectiv px_t^2 şi qs_{t-1}. Obiectivul este determinarea producţiei x_t şi a stocului s_t, $t = 1, 2, 3, 4$, astfel încît costul total anual pentru producţie şi stocare să fie minim.

Mai întîi observăm că ipotezele de lucru conduc la următoarele restricţii:

$$x_1 - s_1 = \alpha, \quad x_1 + x_2 - s_2 = \beta, \quad x_1 + x_2 + x_3 - s_3 = \gamma,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - s_4 = \delta, \quad x_t \geqslant 0, \quad s_t \geqslant 0, \quad t = 1, 2, 3, 4,$$

în care s_t pot fi gîndite ca variabile de egalizare. Pe de altă parte, costul total are expresia

$$f = p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + q(s_1 + s_2 + s_3).$$

Astfel problema iniţială se reduce la găsirea minimului lui f cu restricţiile date. Să observăm însă că f se mai poate scrie

$$f = p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + q(3x_1 + 2x_2 + x_3 - \alpha - \beta - \gamma),$$

adică este o formă pătratică în variabilele x_t.

Aplicaţie numerică. Să se găsească soluţia problemei precedente pentru $a = 500$, $b = 600$, $c = 400$, $d = 1100$; $p = 0{,}005$; $q = 1{,}000$.

6.4. *Probleme de amestec.* Programele pătratice sînt potrivite şi pentru a rezolva problemele de amestec în care procesul tehnologic conduce la restricţii liniare, în timp ce preţurile depind de cantităţile utilizate sau vîndute.

Să presupunem că două produse se fabrică din amestecare a trei materiale brute avînd din fiecare cel mult a, b şi c unităţi de volum pe un ciclu de fabricaţie. Se ştie că ingredientele au respectiv greutăţile specifice α_1, α_2, α_3, iar produsele finite au respectiv greutăţile specifice β_1, β_2. De asemenea, se admite că preţurile q_i, $i = 1, 2, 3$, de cumpărare ale materialelor brute sînt constante, iar preţurile p_j de vînzare ale produselor finite depind liniar de cantităţile vîndute x_1 şi x_2, adică $p_j = a_j - b_j x_j$, $j = 1, 2$. Obiectivul constă în maximizarea beneficiului total pe un ciclu de fabricaţie.

Dacă notăm cu x_{ij}, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$, cantitatea din materialul brut i care intră în produsul finit j, atunci greutăţile specifice trebuie să fie legate prin relaţiile

$$\frac{\alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \alpha_3 x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} = \beta_1, \quad \frac{\alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \alpha_3 x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} = \beta_2,$$

adică

$$(\alpha_1 - \beta_1)\, x_{11} + (\alpha_2 - \beta_1)\, x_{21} + (\alpha_3 - \beta_1)\, x_{31} = 0, \tag{6.7}$$

$$(\alpha_1 - \beta_2)\, x_{12} + (\alpha_2 - \beta_2)\, x_{22} + (\alpha_3 - \beta_2)\, x_{32} = 0.$$

Limitările de disponibil sînt

$$x_{11} + x_{12} < a, \quad x_{21} + x_{22} < b, \quad x_{31} + x_{32} < c, \tag{6.8}$$

Lîngă acestea se adaugă

$$x_1 = x_{11} + x_{21} + x_{31}, \; x_2 = x_{12} + x_{22} + x_{32}. \tag{6.9}$$

Beneficiul total pe ciclul de fabricație este

$$f = (a_1 - b_1x_1)\, x_1 + (a_2 - b_2x_2)\, x_2 - q_1(x_{11} + x_{12}) - q_2(x_{21} + x_{22}) - q_3(x_{31} + x_{32}).$$

Problema se reduce la găsirea maximului lui f cu restricțiile (6.7) — (6.9). Evident acesta este un program pătratic în variabilele x_{ij}.

Aplicație numerică. Să se găsească soluția problemei precedente pentru

$$a = 5, \; b = 10, \; c = 8\,; \; \alpha_1 = 0{,}9\,; \; \alpha_2 = 0{,}7\,; \; \alpha_3 = 0{,}4\,; \; \beta_1 = 0{,}6\,; \; \beta_2 = 0{,}5\,;$$

$$q_1 = 1, \; q_2 = 2, \; q_3 = 3, \; a_1 = 100, \; a_2 = 110, \; a_3 = 120\,; \; b_1 = 0{,}10\,; \; b_2 = 0{,}15\,; \; b_3 = 0{,}20.$$

6.5. *Probleme de investiții.* Un anumit fond de investiții urmează să fie repartizat în n activități productive. Notînd cu x_i procentul din acest fond care se afectează activității i, obținem vectorul $\mathrm{x} = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$ care descrie o politică oarecare de investiții. Acest vector satisface restricțiile naturale

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \; x_i \geqslant 0\,; \tag{6.10}$$

lîngă acestea pot apărea și alte restricții impuse de practica investițiilor dar le presupunem liniare.

Se notează cu ξ_i venitul obținut în ipoteza că întregul fond s-ar investi în activitatea i. Atunci venitul total corespunzător politicii x este $V(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$.

1) În ipoteza că ξ_i ar fi constante date, determinarea politicii optime de investiții ar reveni la rezolvarea unui program liniar constînd din maximizarea lui V cu restricțiile (6.10). Dar aproximarea liniară a obiectivului problemei investițiilor este „prea forțată", deoarece practic ξ_i sînt variabile aleatoare. De aceea modelul liniar dă o soluție orientativă dar nu una satisfăcătoare.

2) Ipoteza plauzibilă este că ξ_i sînt variabile aleatoare ale căror valori medii și matrice covariantă $[\sigma_{ij}]$ sînt estimate prin procedee statistice. Valoarea medie a venitului total este $M(V(\mathrm{x})) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, iar dispersia este $D^2(V(\mathrm{x})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$. Dispersia dă o măsură a riscului ca venitul realizat V să difere de valoarea medie $M(V)$, adică o măsură a variabilității posibile a venitului. O activitate pentru care dispersia este mare este riscantă, în sensul că există posibilitatea unor abateri mari de la valoarea medie. Pe de altă parte, covarianța σ_{ij} a veniturilor

roduse de două activităţi i şi j indică corelaţia acestor venituri; de exemplu, $\sigma_{ij} > 0$ arată că veniturile cresc sau descresc simultan.

Se pune problema determinării politice x care satisface restricţiile (6.10) şi care maximizează pe $M(V)$ şi minimizează pe $D^2(V)$ (maximizează pe $-D^2(V)$). Considerînd funcţia obiectiv

$$\mathrm{x} \to f(\mathrm{x}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j,$$

unde α, β sînt ponderi, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, a căror mărime relativă descrie importanţa pe care o acordăm fiecăruia dintre cei doi termeni, problema se reduce la programul pătratic: max f *cu restricţiile* (6.10).

Deoarece orice matrice de covarianţă este pozitiv semidefinită, funcţia f este concavă. În plus soluţia problemei: max f *cu restricţiile* (6.10) are proprietatea că pentru α, β daţi nu există o structură a investiţiilor care la aceeaşi dispersie să dea un venit mai mare şi nici la acelaşi venit mediu să aibă o dispersie mai mică.

6.6. *Probleme de elasticitate.* Energia de deformaţie pe unitatea de volum a oricărui material izotrop poate fi exprimată cu ajutorul componentelor tensiunii astfel [13]:

$$U = \frac{1}{2E}[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\gamma(\sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \sigma_{xx}\sigma_{yy}) +$$

$$+ 2(1+\gamma)(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2)],$$

unde $\gamma \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ şi $E > 0$ sînt constante de elasticitate. Se constată uşor că forma pătratică U este pozitiv definită şi deci este o funcţie strict convexă. De asemenea $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} = 0$ este punctul critic al lui U şi min $U = 0$. Unele probleme concrete de elasticitate se reduc la rezolvarea programului pătratic: min U cu restricţiile

$$a_{i1}\sigma_{xx} + a_{i2}\sigma_{yy} + a_{i3}\sigma_{zz} + a_{i4}\sigma_{xy} + a_{i5}\sigma_{yz} + a_{i6}\sigma_{zx} \geqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

6.7. Probleme propuse

6.1. Să se găsească min $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - x_1 - 2x_2$ în condiţiile

$$x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \quad x_1 + 4x_2 \leqslant 5, \quad x_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2.$$

R. Punctul de minim are coordonatele $x_1 = \frac{13}{17}$, $x_2 = \frac{18}{17}$.

6.2. Să se rezolve programul $\min \dfrac{-1}{x_1^2 + 2x_2^2}$,

$$x_1 + 4x_2 - 8 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 - 6 \geqslant 0, \quad 2x_1 - x_2 + 4 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

R. $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ și minimul este $-1/24$.

6.3. Să se minimizeze funcția

$$(x_1, x_2, x_3) \to f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3 + \\ + 10x_1 + 9x_2 - 26x_3$$

supusă restricțiilor

$$x_1 + 1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad -x_1 - x_2 - x_3 + 4 \geqslant 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3 \geqslant 0.$$

R. Punctul de minim este $x_1 = -0{,}4$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4{,}2$.

6.4. Să se determine maximul lui $f(\mathrm{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2$ cu restricțiile $-x_1 - x_2 - x_3 + 2 \geqslant 0$, $2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 \geqslant 0$, $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3 \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

R. Punctul de maxim $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ și $f_{\max} = -3$.

6.5. Să se rezolve programul

$$\min f(\mathrm{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3, \quad x_i \geqslant 0.$$

R. Punctul de minim $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{4}{9}\right)$. $f_{\min} = \dfrac{1}{9}$.

6.6. Să se găsească minimul lui

$$f(\mathrm{x}) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3 - 2)^2 + (x_4 - 1)^2 + (x_5 - 1)^2$$

cu restricțiile

$$x_1 + 3x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \quad x_2 - x_5 = 0, \quad -10 \leqslant \mathrm{x} \leqslant 10.$$

R. Punct de plecare este $\mathrm{x}_0 = (2, 2, 2, 2, 2)$. Soluția este $\mathrm{x}^* = (-7{,}6744 \cdot 10^{-1}$ $2{,}5581 \cdot 10^{-1}$; $6{,}2790 \cdot 10^{-1}$; $-1{,}1627 \cdot 10^{-1}$; $2{,}5581 \cdot 10^{-1})$, $f^* = 4{,}0930$.

7

PROGRAMARE GEOMETRICĂ POZINOMIALĂ

7.1. Introducere

Programele la care ne vom referi în continuare sînt formulate cu ajutorul *pozinoamelor*, adică a funcţiilor

$$x \to \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_n^{a_{in}}, \quad x_j > 0, \quad c_i > 0, \quad a_{ij} \in \mathbb{R},$$

care modelează multe probleme de fizică, inginerie şi cercetare operaţională. Unele dintre ele exprimă direct legi ale naturii sau legi economice, altele dau aproximări ale datelor empirice.

Programarea geometrică pozinomială dă o tehnică de rezolvare a programelor formulate cu ajutorul pozinoamelor, bazată pe transformarea acestor programe în probleme echivalente cu restricţii liniare. Ea a luat naştere ca urmare a folosirii în problemele de optimizare a inegalităţii dintre media aritmetică şi media geometrică, relaţia numită *inegalitatea geometrică*, de unde şi denumirea de *programare geometrică*.

Programele geometrice bine formulate admit soluţii unice, globale. Minimul din problema iniţială este egal cu maximul din problema duală, iar problema duală are avantajul că restricţiile sale sînt liniare. Pe lîngă procurarea soluţiei problemei iniţiale, ponderile optimale obţinute ca soluţie a problemei duale indică contribuţia relativă a termenilor corespondenţi din problema iniţială la atingerea optimului. Dacă programul geometric are *gradul de dificultate* egal cu zero, atunci optimizarea este banală în sensul că atît soluţia problemei duale cît şi soluţia problemei iniţiale se obţin rezolvînd respectiv sisteme de ecuaţii liniare cu soluţii unice. Pentru un grad de dificultate strict pozitiv, rezolvarea problemei duale reclamă o tehnică efectivă. Avem însă avantajul că această pro-

blemă poate fi reformulată cu ajutorul unui număr de variabile egal cu gradul de dificultate, variabile care satisfac numai inegalităţi liniare.

Dacă toate restricţiile din programul geometric sînt active, atunci toate restricţiile inegalităţii din programul dual sînt inactive. În acest caz problema duală este reductibilă la o problemă de extrem liber, proprietate ce permite rezolvarea ei cu metode clasice (exacte sau aproximative).

În cele ce urmează sînt prezentate pe scurt ideile şi tehnicile de bază reunite sub denumirea *programare geometrică pozinominală*. Pentru uşurarea înţelegerii cît şi pentru practicieni sînt date şi unele aplicaţii directe ale acestei teorii. Dar pentru cei iniţiaţi recomandăm lucrările [5, 11, 19] în care se prezintă şi alte aplicaţii.

7.2. Inegalitatea geometrică

Considerăm numerele $v_i > 0$ şi ponderile $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m = 1$. Să arătăm că între *media aritmetică ponderată* $\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \ldots + \delta_m v_m$ şi *media geometrică ponderată* $v_1^{\delta_1} v_2^{\delta_2} \ldots v_m^{\delta_m}$ există relaţia

$$\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \ldots + \delta_m v_m \geqslant v_1^{\delta_1} v_2^{\delta_2} \ldots v_m^{\delta_m} \tag{7.1}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $v_1 = v_2 = \ldots = v_m$.

Mai întîi observăm că funcţia g definită de $g(v_1, v_2, \ldots, v_m) = v_1^{\delta_1} v_2^{\delta_2} \ldots v_m^{\delta_m}$, $v_i > 0$, $\delta_i > 0$, $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m = 1$, este de clasă C^∞. În plus, prin diferenţiere, găsim

$$\frac{\mathrm{d}g}{g} = \mathrm{d}(\ln g) = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{m} \delta_i \ln v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta_i}{v_i}\, \mathrm{d}v_i$$

şi deci

$$\frac{g\mathrm{d}^2 g - \mathrm{d}g^2}{g^2} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\delta_i}{v_i^2}\, \mathrm{d}v_i^2,$$

adică

$$\frac{1}{g}\mathrm{d}^2 g = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\delta_i}{v_i}\, \mathrm{d}v_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta_i}{v_i^2}\, \mathrm{d}v_i^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta_i(\delta_i - 1)}{v_i^2}\, \mathrm{d}v_i^2 + \sum_{j \neq k} \frac{\delta_j}{v_j} \frac{\delta_k}{v_k}\, \mathrm{d}v_j\, \mathrm{d}v_k.$$

de altă parte, se știe că

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \frac{\delta_1(\delta_1-1)}{v_1^2} & \frac{\delta_1\delta_2}{v_1v_2} & \dots & \frac{\delta_1\delta_i}{v_1v_i} \\ \frac{\delta_2\delta_1}{v_2v_1} & \frac{\delta_2(\delta_2-1)}{v_2^2} & \dots & \frac{\delta_2\delta_i}{v_2v_i} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{\delta_i\delta_1}{v_iv_1} & \frac{\delta_i\delta_2}{v_iv_2} & \dots & \frac{\delta_i(\delta_i-1)}{v_i^2} \end{vmatrix} = \left(1-\sum_{j=1}^{i}\delta_j\right)\prod_{j=1}^{i}\left(\frac{-\delta_j}{v_j^2}\right),$$

$i = 1, 2, \dots, m$. De aceea $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{2p-1} < 0$, $\Delta_{2p} > 0, \dots$ și $\Delta_m = 0$, adică $d^2g \leqslant 0$, $\forall v_i > 0$, ceea ce înseamnă că funcția g este concavă.

Deoarece funcția definită de $\delta_1v_1 + \delta_2v_2 + \dots + \delta_mv_m$ este liniară (deci convexă), iar funcția $-g$ este convexă, rezultă că funcția definită prin $f(v_1, v_2, \dots, v_m) = \delta_1v_1 + \delta_2v_2 + \dots + \delta_mv_m - v_1^{\delta_1}v_2^{\delta_2}\dots v_m^{\delta_m}$, $v_i > 0$, $\delta_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m}\delta_i = 1$, este convexă. Deci minimul său global va fi atins pe mulțimea punctelor critice, adică pe mulțimea soluțiilor sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} = \delta_i - \delta_i v_i^{\delta_i-1}\prod_{k\neq i} v_k^{\delta_k} = 0,\ v_i > 0,\ \delta_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Rezultă $v_1 = v_2 = \dots = v_m$ și valoarea minimă $f(v_1, v_2, \dots, v_m) = v_1\left(\sum_{i=1}^{m}\delta_i\right) - v_1^{\sum_{i=1}^{m}\delta_i} = 0$. Astfel $f(v_1, v_2, \dots, v_m) \geqslant 0$, $\forall v_i > 0$, $\delta_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m}\delta_i = 1$ cu egalitate dacă și numai dacă $v_1 = v_2 = \dots = v_m$.

Dacă facem schimbarea de variabile $u_i = \delta_iv_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, atunci inegalitatea (7.1) ia forma

$$u_1 + u_2 + \dots + u_m \geqslant \left(\frac{u_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{u_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\dots\left(\frac{u_m}{\delta_m}\right)^{\delta_m}, \qquad (7.1')$$

egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $\frac{u_1}{\delta_1} = \frac{u_2}{\delta_2} = \dots = \frac{u_m}{\delta_m}$. Raționamentul precedent arată că (7.1) are loc chiar dacă înlocuim pe $\delta_i > 0$ cu $\delta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. De asemenea, pornind de la forma (7.1'), se poate justifica ușor varianta

$$\forall u_i > 0,\ \delta_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m}\delta_i = 1,\quad \sum_{i=1}^{m}u_i > \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{u_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \qquad (7.1'')$$

cu convenţia $x^x \equiv 1$ pentru $x = 0$, egalitatea realizîndu-se dacă şi numai dacă $\frac{u_1}{\delta_1} = \frac{u_2}{\delta_2} = \ldots = \frac{u_m}{\delta_m}$. Dacă în (7.1″) facem schimbarea $\delta_i = \lambda_i/\lambda$, unde $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$, deducem varianta pentru ponderi nenormate:

$$\forall u_i > 0,\ \lambda_i \geqslant 0, \left(\sum_{i=1}^{m} u_i\right)^{\lambda} \geqslant \lambda^{\lambda} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{u_i}{\lambda_i}\right)^{\lambda_i} \tag{7.1‴}$$

cu egalitatea dacă şi numai dacă

$$\frac{u_1}{\lambda_1} = \frac{u_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{u_m}{\lambda_m}.$$

Inegalitatea (7.1), sau oricare dintre variantele sale, poartă numele de *inegalitatea geometrică*.

7.3. Infimumul unui pozinom şi supremumul funcţiei duale

Funcţia reală f, de clasă C^{∞}, definită prin

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}} = \sum_{i=1}^{m} u_i(\mathbf{x}), \tag{7.2}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_n > 0$, $c_i > 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, se numeşte *pozinom*. Asemenea funcţii sau prelungirile lor firesti apar în raţionalizarea activităţilor economice şi inginereşti. Un pozinom f ia numai valori strict pozitive. De aceea există $\inf_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$. Pentru găsirea unor minoranţi pozitivi ai valorilor lui f, şi, cînd unul dintre minoranţi este strict pozitiv, pentru găsirea efectivă a marginii inferioare $\inf_{x} f(\mathbf{x})$, se poate utiliza inegalitatea geometrică

$$u_i > 0,\quad \delta_i \geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{m} \delta_i = 1,\quad \sum_{i=1}^{m} u_i \geqslant \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{u_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă

$$\frac{u_1}{\delta_1} = \frac{u_2}{\delta_2} = \ldots = \frac{u_m}{\delta_m}.$$

Într-adevăr, conform acestei inegalităţi putem scrie

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i(x) \geqslant \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{u_i(x)}{\delta_i}\right)^{\delta_i} =$$

$$= \left(\frac{c_1 x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_n^{a_{1n}}}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \cdot \left(\frac{c_2 x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_n^{a_{2n}}}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \ldots \left(\frac{c_m x_1^{a_{m1}} x_2^{a_{m2}} \ldots x_n^{a_{mn}}}{\delta_m}\right) =$$

$$= \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \ldots \left(\frac{c_m}{\delta_m}\right)^{\delta_m} \cdot x_1^{D_1} x_1^{D_2} \ldots x_n^{D_n} = V(\delta, \mathrm{x}),$$

unde $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$, $D_j = \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Presupunem că putem găsi ponderile δ_i (existenţa va fi dovedită în paragraful următor) astfel încît, pe lîngă *condiţiile de pozitivitate* $\delta_i \geqslant 0$ şi *condiţia de normalitate* $\sum_{i=1}^{m} \delta_i = 1$, să fie satisfăcute şi *condiţiile de ortogonalitate* $\sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} = 0$. În această ipoteză $V(\delta, \mathrm{x})$ se reduce la

$$V(\delta) = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \ldots \left(\frac{c_m}{\delta_m}\right)^{\delta_m}.$$

Funcţia definită de $V(\delta)$ pe $\delta_1 \geqslant 0, \delta_2 \geqslant 0, \ldots, \delta_m \geqslant 0$ cu convenţia $x^x \equiv 1$ pentru $x = 0$, se numeşte *funcţia dală ataşată pozinomului f*. Evident restricţia ei la $\delta_i > 0$ este de clasă C^∞.

Relaţia $f(\mathrm{x}) \geqslant V(\delta)$, adevărată în condiţiile de pozitivitate, normalitate şi ortogonalitate, arată că orice valoare a lui V este un minorant strict pozitiv al valorilor lui f şi orice valoare a lui f este un majorant strict pozitiv al valorilor lui V. În plus, în aceleaşi condiţii de pozitivitate, normalitate şi ortogonalitate $\inf_{\mathrm{x}} f(\mathrm{x}) \geqslant \sup_{\delta} V(\delta)$.

Exemple. 1) $f(x) = x + 2x^{-1}$, $x > 0$. Avem $f(x) = \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}(4x^{-1}) \geqslant (2x)^{1/2}(4x^{-1})^{1/2} = 2\sqrt{2}$, adică $\inf_x f(x) = 2\sqrt{2}$. Acest infimum este un minim deoarece pentru $x = \sqrt{2}$ găsim $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Funcţia dală ataşată lui f este $V(\delta) = \left(\frac{1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{2}{\delta_2}\right)^{\delta_2}$, $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$. Adăugînd condiţiile de normalitate şi ortogonalitate, $\delta_1 + \delta_2 = 1$, $\delta_1 - \delta_2 = 0$, găsim soluţia unică $\delta_1 = \delta_2 = 1/2$ şi deci $\sup_\delta V(\delta) = \max_\delta V(\delta) = V(1/2, 1/2) = 2\sqrt{2}$.

2) $f(x) = x^{-1}$, $\inf_x f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\min_x f(x)$ nu există.

Funcția duală atașată lui f este $V(\delta_1) = \left(\frac{1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}$, $\delta_1 \geqslant 0$. Deoarece condiția de normalitate $\delta_1 = 1$ contrazice condiția de ortogonalitate $-\delta_1 = 0$, este clar că relația $f(x) \geqslant V(\delta_1)$ nu are loc, iar problema aflării supremumului funcției duale (în condițiile de nenegativitate, normalizate și ortogonalitate) nu are sens.

7.4. Minimul unui pozinom și maximul funcției duale

Fie $f(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}}$ un pozinom. O problemă de forma: să se găsească $\min_{\mathrm{x}} f(\mathrm{x})$, se numește *program geometric pozinomial.*

Să presupunem că f admite un minim local. Observăm că schimbarea de variabile $x_j = e^{z_j}$ face ca problema $\min_{\mathrm{x}} f(\mathrm{x})$ să fie echivalentă cu problema $\min_{\mathrm{z}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \exp\left(\sum_{j=1}^{n} z_j a_{ij}\right)\right)$, iar funcția $\sum_{i=1}^{m} c_i \exp\left(\sum_{j=1}^{n} z_j a_{ij}\right)$ este strict convexă. Se știe însă că pentru o funcție strict convexă punctul de minim este unic, iar minimul local este în mod necesar un minim global. De aceea minimul local al unui pozinom trebuie să fie minim global, iar punctul de minim este unic. În plus, punctul de minim al unui pozinom este în mod necesar un punct critic deoarece pozinomul este o funcție de clasă C^∞. Explicațiile din paragraful precedent sugerează că unui program pozinomial i se poate atașa o problemă duală: să se găsească maximul funcției

$$\delta \to V(\delta) = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \ldots \left(\frac{c_m}{\delta_m}\right)^{\delta_m} \tag{7.3}$$

cu restricțiile

$$\delta_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} = 0$$

(cu convenția $x^x \equiv 1$ pentru $x = 0$). Deoarece restricțiile (7.4) sînt liniare, mulțimea determinată de ele este convexă. În plus, proprietatea logaritmului natural de a fi o funcție crescătoare arată că găsirea $\max_{\delta} V(\delta)$ este echivalentă cu găsirea $\max_{\delta} \ln V(\delta) = -\min_{\delta}(-\ln V(\delta))$, unde $\ln V(\delta) = -\sum_{i=1}^{m} \delta_i \ln\left(\frac{\delta_i}{c_i}\right)$, cu convenția $x \ln x \equiv 0$ pentru $x = 0$. Pe de altă parte, funcțiile definite prin $V_i = \delta_i \ln\left(\frac{\delta_i}{c_i}\right)$, $\delta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, sînt strict convexe; esențial aceasta este o consecință a faptului că res-

tricțiile lor la $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, au diferențialele de ordinul doi, $d^2 V_i = \frac{1}{\delta_i} d\delta_i^2$, pozitiv definite. Suma acestor funcții $-\ln V$ este strict convexă. Astfel problema duală este echivalentă cu găsirea minimului unei funcții strict convexe $-\ln V$ pe mulțimea (7.4). Deci, dacă V admite un maxim pe (7.4), atunci acesta este în mod necesar un maxim global, iar punctul de maxim este unic.

Fără a scădea generalitatea [11], putem presupune rang $[a_{ij}] = n < m$, unde n este numărul variabilelor x_j, iar m este numărul termenilor din funcția pozinom. Dacă $m = n + 1$, atunci sistemul

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} = 0 \tag{7.4'}$$

are soluție unică care, în mod necesar, este punctul de maxim pentru programul dual. Dacă $m > n + 1$, atunci $d = m - n - 1$ dintre variabilele δ_i din sistemul (7.4'), renotate să zicem cu $r_1, r_2, \ldots, r_d$, sînt independente; sistemul are soluții de forma $\delta_i = \delta_i(r_1, r_2, \ldots, r_d)$, membrii din dreapta fiind polinoame de gradul unu în $r_1, r_2, \ldots, r_d$. Înlocuind pe δ_i în $V(\delta)$, găsim o funcție $v = v(r_1, r_2, \ldots, r_d)$ definită pe $\delta_i = \delta_i(r_1, r_2, \ldots, r_d) \geqslant 0$. Astfel, problema duală se reduce la găsirea maximului lui v. Explicațiile care urmează arată că acest maxim este în mod esențial liber și deci este atins într-un punct critic al lui v. Subliniem și faptul că în cazurile particulare $d = 1, 2$ sau chiar 3 se pot alcătui tabele de valori pentru v, din care putem deduce cu aproximație valoarea maximă, valoarea care convine multor probleme concrete. Dealtfel, orice soluție δ a restricțiilor duale conduce la un minorant $V(\delta)$ pentru minimul lui f, iar orice punct $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cu $x_j > 0$, dă un majorant $f(\mathrm{x})$ pentru valoarea minimă a lui f.

Să introducem funcția lui Lagrange

$$L = \sum_{i=1}^{m} \delta_i \ln \frac{\delta_i}{c_i} - \sum_{j=1}^{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} \right) - t \left(\sum_{i=1}^{m} \delta_i - 1 \right), \quad \delta_i \geqslant 0 :$$

Ținînd seama de teoremele din § 3.7, ajungem la concluzia că o condiție necesară și suficientă pentru existența unui minim global al lui $-\ln V$ pe mulțimea (7.4), sau echivalent pentru existența soluției problemei duale, este ca sistemul

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_i} = \ln \frac{\delta_i}{c_i} + 1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j - t = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_j} = -\sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 1 - \sum_{i=1}^{m} \delta_i = 0$$

($m + n + 1$ ecuații cu $m + n + 1$ necunoscute $\delta_i \geqslant 0$; s_j, t) să fie compatibil.

Să stabilim legătura între programul inițial și programul dual în ipoteza rang $[a_{ij}] = n < m$, arătînd că dacă una dintre probleme are soluție, atunci și cealaltă are soluție, cele două soluții determinîndu-se reciproc. În special ne interesează faptul că soluția problemei duale, adeseori mai simplă decît a problemei inițiale, oferă totodată și soluția programului pozinominal.

Punctele critice ale unui pozinom f sînt date de sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} x_j^{a_{ij}-1} \prod_{k \neq j} x_k^{a_{ik}} = 0,$$

$x_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sau, altfel scris,

$$x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i^{a_{ij}} x_1^{a_{i1}} \ldots x_j^{a_{ij}} \ldots x_n^{a_{in}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i(\mathrm{x}) = 0, \; x_j > 0, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.5}$$

Deoarece acesta este un sistem neliniar, determinarea efectivă a punctelor critice ale lui f este anevoioasă.

Să presupunem că problema $\min\limits_{\mathrm{x}} f(\mathrm{x})$ este bine formulată, adică există soluția $\mathrm{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ a sistemului (7.5) astfel încît $f(\mathrm{x}_0) > 0$ este minimul căutat. Avem $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} u_i(\mathrm{x}_0) = 0$. Apoi observăm că numerale $\delta_{i0} = \dfrac{u_i(\mathrm{x}_0)}{f(\mathrm{x}_0)}$ satisfac condițiile

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_{i0} a_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \delta_{i0} = 1, \quad \delta_{i0} > 0, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

adică $\delta_0 = (\delta_{10}, \delta_{20}, \ldots, \delta_{m0})$ verifică condițiile de ortogonalitate, de normalitate și de pozitivitate. De asemenea, $f(\mathrm{x}_0) = (f(\mathrm{x}_0))^{\delta_{10}+\delta_{20}+\ldots\delta_{m0}} = (f(\mathrm{x}_0))^{\delta_{10}} \cdot (f(\mathrm{x}_0))^{\delta_{20}} \ldots (f(\mathrm{x}_0))^{\delta_{m0}} = \left(\dfrac{u_1(\mathrm{x}_0)}{\delta_{10}}\right)^{\delta_{10}} \left(\dfrac{u_2(\mathrm{x}_0)}{\delta_{20}}\right)^{\delta_{20}} \ldots \left(\dfrac{u_m(\mathrm{x}_0)}{\delta_{m0}}\right)^{\delta_{m0}} =$ (în baza condițiilor de ortogonalitate), $\left(\dfrac{c_1}{\delta_{10}}\right)^{\delta_{10}} \left(\dfrac{c_2}{\delta_{20}}\right)^{\delta_{20}} \ldots \left(\dfrac{c_m}{\delta_{m0}}\right)^{\delta_{m0}} = V(\delta_0)$. Această relație împreună cu $f(\mathrm{x}) \geqslant \inf\limits_{\mathrm{x}} f(\mathrm{x}) \geqslant \sup\limits_{\delta} V(\delta) \geqslant V(\delta)$ arată că maximul lui V este $V(\delta_0) = f(\mathrm{x}_0)$ și această valoare este atinsă în punctul (unic) δ_0, adică δ_{i0} sînt „ponderi optimale".

Să presupunem că am găsit o soluție $\delta_0 = (\delta_{10}, \delta_{20} \ldots, \delta_{m0})$ a restricțiilor (7.4) astfel încît $\delta_{i0} > 0$, $i = 1,2, \ldots, m$, și $V(\delta_0)$ este maximul lui $(V\delta)$. Considerăm sistemul

$$u_i(\mathrm{x}) = c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}} = V(\delta_0)\delta_{i0}, \; i=1, 2, \ldots, m, \; x_j > 0, \; j=1, 2, \ldots, n. \tag{7.6}$$

Să observă că acesta este un sistem liniar în necunoscutele $\ln x_j$, iar ipoteza rang $[a_{ij}] = n < m$ asigură existența și unicitatea soluției $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$. Dar

$$\frac{u_1(\mathbf{x}_0)}{\delta_{10}} = \frac{u_2(\mathbf{x}_0)}{\delta_{20}} = \ldots = \frac{u_m(\mathbf{x}_0)}{\delta_{m0}} = V(\delta_0)$$

implică egalitatea dintre media aritmetică și media geometrică, adică

$$f(\mathbf{x}_0) = V(\delta_0) = \left(\frac{c_1}{\delta_{10}}\right)^{\delta_{10}} \left(\frac{c_2}{\delta_{20}}\right)^{\delta_{20}} \cdot \ldots \left(\frac{c_m}{\delta_{m0}}\right)^{\delta_{m0}}$$

este minimul lui f, iar $\mathbf{x}_0$ este punctul de minim.

Cheia succesului acestei metode de rezolvare a programului $\min\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ constă în faptul că restricțiile (7.4) sînt liniare, iar sistemul (7.6) este liniar în necunoscutele $\ln x_j$ spre deosebire de sistemul (7.5) care este neliniar.

Revenim la sistemul (7.4'). Diferența $d = m - (n + 1)$, unde m este numărul variabilelor și $n + 1$ este numărul ecuațiilor independente se numește *numărul gradelor de libertate*. Acest număr poate fi atașat direct programului geometric $\min\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$. Într-adevăr

$$d = \text{nr. termenilor} - \text{nr. variabilelor} - 1,$$

unde prin nr. termenilor înțelegem numărul termenilor din $f(\mathbf{x})$, iar prin nr. variabilelor înțelegem numărul variabilelor x_j independente dat de rangul matricei $[a_{ij}]$. Evident, cu cît d este mai mare cu atît este mai dificil să găsim soluția programului dual și deci soluția programului geometric. De aceea Duffin și Zener [11] au propus pentru numărul d denumirea de *grad de dificultate* al programului geometric $\min\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$.

7.5. Aplicații

7.5.1. *Minimul duratei tehnologice.* În procesele de prelucrare (a unor piese, a unor vagoane într-o stație, a trenurilor etc.) durata tehnologică t_{ij} ca funcție de doi factori de influență $x_i > 0$ și $y_j > 0$ poate avea expresia

$$t_{ij} = p_1(d + a_1 x_i + a_2 y_j) + p_2 B x_i^{A_1} y_j^{A_2},$$

unde p_1 și p_2 sînt ponderi, adică $p_1 + p_2 = 1$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, iar $d \geqslant 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $B > 0$, A_1, A_2 sînt parametri. Se cere $\inf t_{ij}$.

Notînd $x_i = x_1$, $y_j = x_2$, $p_1 a_1 = c_1$, $p_1 a_2 = c_2$, $p_2 B = c_3$, $A_1 = -a$, $A_2 = -b$, problema este echivalentă cu găsirea $\inf\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$, unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $x_1 \rhd 0$, $x_2 \rhd 0$,

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1^{-a}x_2^{-b},\ c_1,\ c_2,\ c_3 > 0$$

Evident aici se impune o discuţie după valorile parametrilor reali a şi b. Punctele critic ale lui f sînt date de sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1 - a\,c_3\,x_1^{-a-1}x_2^{-b} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 - bc_3\,x_1^{-a}x_2^{-b-1} = 0.$$

Dacă $a \leqslant 0$ şi $b \in \mathbb{R}$ sau $a \in \mathbb{R}$ şi $b \leqslant 0$, atunci sistemul precedent este incompatibil; deci f nu are puncte critice şi implicit nici minim. Pentru $a < 0$ şi $b \leqslant 0$ găsim $\inf f(x) = 0$; pentru $a < 0$ şi $b > 0$ deducem $\inf\limits_{x_2}\inf\limits_{x_1} f(x_1, x_2) = \inf\limits_{x_1}\min\limits_{x_2} f(x_1, x_2) = 0$; pentru $a = 0$ şi $b = 0$ obţinem $\inf\limits_{x} f(x) = c_3$; pentru $a = 0$ şi $b > 0$ găsim $\inf\limits_{x_1}\min\limits_{x_2} f(x_1, x_2) = \min\limits_{x_2}\inf\limits_{x_1} f(x_1, x_2) = \left(\left(\frac{c_3}{b}\right)^b c_3\right)^{1/(b+1)}(b+1)$. Rezultate analoage se obţin dacă schimbăm pe a cu b.

Fie $a > 0$ şi $b > 0$. Atunci

$$x_1 = \frac{a}{c_1}\left(\left(\frac{c_1}{a}\right)^a\left(\frac{c_2}{b}\right)^b c_3\right)^{\frac{1}{a+b+1}}, \quad x_2 = \frac{b}{c_2}\left(\left(\frac{c_1}{a}\right)^a\left(\frac{c_2}{b}\right)^b c_3\right)^{\frac{1}{a+b+1}}$$

este punctul critic al lui f. În plus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = a(a+1)\,c_3\,x_1^{-a-2}x_2^{-b}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = b(b+1)\,c_3\,x_1^{-a}x_2^{-b-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = a\,b\,c_3\,x_1^{-a-1}x_2^{-b-1},$$

şi cum

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = a\,b\,c_3^2 x_1^{-2(a+1)}x_2^{-2(b+1)}(a+b+1) > 0,$$

funcţia f este strict convexă. Rezultă că punctul critic este un punct de minim global şi deci

$$\inf_x f(x) = \min_x f(x) = \left(\left(\frac{c_1}{a}\right)^a\left(\frac{c_2}{b}\right)^b c_3\right)^{\frac{1}{a+b+1}}(a+b+1).$$

Să formulăm acum problema duală: să se găsească $\sup\limits_{\delta} V(\delta) = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{c_3}{\delta_3}\right)^{\delta_3}$ cu restricţiile $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \geqslant 0$,

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1,\ \delta_1 - a\delta_3 = 0,\ \delta_2 - b\delta_2 = 0.$$

Dacă $a \lhd 0$ şi $b \in \mathbb{R}$ sau $a \in \mathbb{R}$ şi $b \lhd 0$, atunci sistemul restricţiilor nu are soluţii şi problema supremului îşi pierde sensul. Fie $a = 0$ şi $b = 0$. Rezultă soluţia unică $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 1$ şi deci $\sup\limits_{\delta} V(\delta) = \max\limits_{\delta} V(\delta) = V(0, 0, 1) = c_3$. Pentru $a = 0$ şi $b > 0$, găsim soluţia unică $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \frac{b}{b+1}$, $\delta_3 = \frac{1}{b+1}$. Deci $\sup\limits_{\delta} V(\delta) = \max\limits_{\delta} V(\delta) = V\left(0, \frac{b}{b+1}, \frac{1}{b+1}\right) = \left(\left(\frac{c_2}{b}\right)^b c_3\right)^{\frac{1}{b+1}}(b+1)$. Un rezultat analog găsim pentru $a > 0$ şi $b = 0$. Dacă $a > 0$ şi

0, atunci sistemul restricțiilor admite soluția unică $\delta_1 = \frac{a}{a+b+1}$, $\delta_2 = \frac{b}{a+b+1}$, $\delta_3 = \frac{1}{a+b+1}$ și deci $\sup_{\delta} V(\delta) = \max_{\delta} V(\delta) = V\left(\frac{a}{a+b+1}, \frac{b}{a+b+1}, \frac{1}{a+b+1}\right) = \left(\left(\frac{c_1}{a}\right)^a \left(\frac{c_2}{b}\right)^b c_3\right)^{\frac{1}{a+b+1}} (a+b+1) = M$. În acest caz $\min_x f(x) = \sup_{\delta} V(\delta) = M$ și punctul le minim al lui f se obține rezolvînd sistemul

$$c_1 x_1 = \frac{a}{a+b+1} M, \quad c_2 x_2 = \frac{b}{a+b+1} M, \quad c_3 x_1^{-a} x_2^{-b} = \frac{1}{a+b+1} M.$$

Se observă însă că soluția acestui sistem este punctul critic determinat mai înainte.

7.5.2. *O problemă din teoria stocurilor.* Datele problemei sînt următoarele (fig. 7.1): aprovizionarea se face în serii de cîte n articole, nu se admite nici un deficit, h este numărul de articole solicitate în unitate de timp, c_l este costul lansării comenzii unei serii de articole, c_s este costul stocării unui articol pe unitatea de timp, N — cererea totală pe un interval de timp $[0, \theta]$ iar h, c_l, c_s, N, θ sînt constante. Se cere:

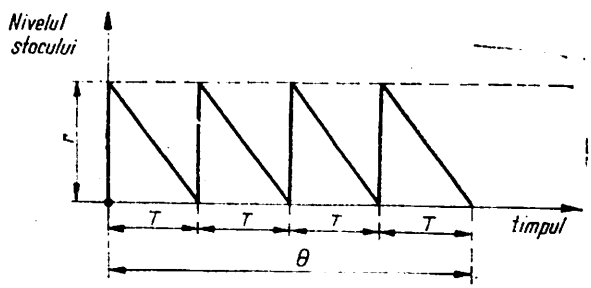


Fig. 7.1

1) să se afle n astfel încît costul total al lansării comenzii și al stocării celor N articole să fie minim;

2) să se determine numărul r de serii și perioade T de reaprovizionare stocului.

Deoarece în timpul unei perioade T nivelul mediu al stocului este $n/2$, costul total pentru o serie de articole este $c_l + \frac{n}{2} T c_s$. Pe de altă parte, avem $n = hT$, $r = N/n = \theta/T$. De aceea costul total al lansării comenzii și al stocării celor N piese are expresia

$$\Gamma = \left(c_l + \frac{n}{2} T c_s\right) r = N c_l n^{-1} + \frac{\theta c_s}{2} n.$$

El se compune din cheltuielile totale de lansare $\Gamma_l = N c_l n^{-1}$ și din cheltuielile totale de stocare $\Gamma_s = \frac{\theta c_s}{2} n$.

I. Dacă lui n îi impunem numai restricția $n > 0$, atunci Γ este un pozinom în n. De aceea în Γ este un program geometric pozinomial. Evident gradul său de dificultate este zero. Funcția duală are valorile

$$V(\delta) = \left(\frac{N c_l}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{\theta c_s}{2\delta_2}\right)^{\delta_2}.$$

Avem de găsit $\max\limits_{\delta} V(\delta)$ cu restricțiile $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$, $\delta_1 + \delta_2 = 1$, $-\delta_1 + \delta_2 = 0$. Rez

$\delta_1 = \delta_2 = 1/2$ și deci $\max\limits_{\delta} V(\delta) = V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2N\theta c_l \cdot c_s}$, astfel încît $\min\limits_{n} \Gamma = \sqrt{2N\theta c_l c_s}$, ș

$N c_l n^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2N\theta c_l c_s}$, $\frac{\theta c_s}{2} n = \frac{1}{2}\sqrt{2N\theta c_l c_s}$, adică $n = \sqrt{2\frac{Nc_l}{\theta c_s}}$ este punctul de minim. În plus egalitățile $\delta_1 = \delta_2 = 1/2$ arată că Γ_l și Γ_s contribuie egal la realizarea minimului lui Γ, adică minimul funcției economice de gospodărie a stocului este atins dacă și numai dacă costul total de lansare a comenzii este egal cu costul total de stocare. Cu rezultatele de mai sus găsim

$$T = \sqrt{2\frac{\theta c_l}{Nc_s}}, \quad r = \theta\sqrt{\frac{Nc_s}{2\theta c_l}}.$$

II. Să presupunem că lui n îi impunem restricția de a fi număr natural. Atunci se rezolvă mai întîi programul de la punctul I. Dacă numărul găsit este număr natural, atunci problema este rezolvată. Dacă nu, atunci fie n_0 partea întreagă a lui n (pentru o problemă bine formulată $n_0 \geqslant 1$); se formează și se rezolvă un nou program geometric adăugînd la cel vechi restricțiile $n \leqslant n_0$ și $n \geqslant n_0 + 1$. Repetînd procedeul, ajungem fie la un n natural, fie la concluzia că restricțiile sînt incompatibile, adică problema propusă nu are soluție.

7.5.3. *Baterii de intensitate maximă.* Se dau N pile electrice identice, fiecare avînd tensiunea electromotoare E și rezistența interioară r. Se notează cu R rezistența exterioară. Legînd în serie cîte n pile și apoi în paralel grupele astfel obținute, formăm baterii (fig. 7.2). Intensitatea curentului dat de o asemenea baterie este $I = \frac{NnE}{NR + n^2 r}$. Să se determine n astfel încît bateria să furnize e un curent de intensitate maximă (vezi și problema 1.15).

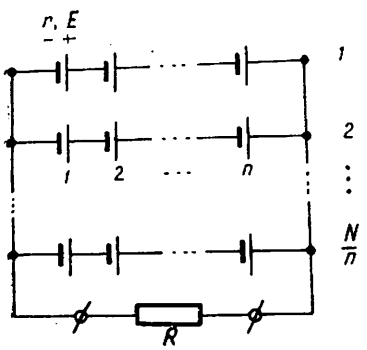


Fig. 7.2

I. Extindem pe I la $(0,\infty)$ și observăm că $\max I = \frac{1}{\min 1/I}$. Pe de altă parte $\min\limits_{n>0} \frac{1}{I} = \min\limits_{n>0}\left(\frac{R}{E} n^{-1} + \frac{r}{NE} n\right)$ este un program geometric pozinomial de tipul celui discutat și rezolvat în problema precedentă la punctul I. Deci $n = \sqrt{N\frac{R}{r}}$ este punctul de maxim și $I_{\max} = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{N}{Rr}}$.

II. Dacă lui n îi impunem restricția de a fi număr natural, atunci programul se rezolvă după explicațiile date la punctul II din problema precedentă.

7.5.4. *O problemă legată de proiectarea compresoarelor.* O problemă clasică în proiectarea compresoarelor este găsirea presiunilor dintre etaje pentru o compresie reversibilă adiabatică a unui gaz ideal. După cum se știe din termodinamică, aceasta revine la minimizarea consumului de energie a unui sistem cu n etaje al cărui lucru este descris prin

$$f(P_2, P_3, \ldots, P_n) = \frac{RST}{\alpha}\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\alpha} + \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\alpha} + \ldots + \left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)^{\alpha} - n\right],$$

unde P_1 este presiunea interioară, P_{n+1} — presiunea exterioară, R — constanta gazelor, S — viteza de curgere molară, T — temperatura interioară $\alpha = \frac{c_p - c_v}{c_p}$, c_p — capacitatea termică la presiune constantă, c_v — capacitatea termică la volum constant.

Problema precedentă este echivalentă cu programul geometric

$$\min \left[c\left(\frac{x_1}{c_1}\right)^{\alpha} + c\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} + \ldots + c\left(\frac{c_2}{x_{n-1}}\right)^{\alpha} \right],$$

unde $c = \frac{RST}{\alpha}$, $c_1 = P_1$, $c_2 = P_n$, $x_i = P_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Acesta are gradul de dificultate egal cu zero. Programul dual ataşat este

$$\max \left(\frac{cc_1^{-\alpha}}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{c}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \ldots \left(\frac{c}{\delta_{n-1}}\right)^{\delta_{n-1}} \left(\frac{cc_2^{\alpha}}{\delta_n}\right)^{\delta_n}$$

cu restricţiile $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1} + \delta_n = 1$, $\delta_1 - \delta_2 = 0$, $\delta_2 - \delta_3 = 0, \ldots, \delta_{n-1} - \delta_n = 0$ Rezultă $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = 1/n$ şi minimul căutat este $nc\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\alpha/n}$. Punctul de minim este soluţia sistemului.

$$c\left(\frac{x_1}{c_1}\right)^{\alpha} = c\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} = \ldots = c\left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right)^{\alpha} = c\left(\frac{c_2}{x_{n-1}}\right)^{\alpha} = c\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{\alpha}{n}},$$

adică $x_i = c_2^{\frac{i}{n}} c_1^{1-\frac{i}{n}}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Din faptul că toate variabilele duale optimale sînt egale, rezultă că toate etajele compresorului contribuie egal la realizarea minimului energiei.

7.6. Programe pozinomiale cu restricţii

Să considerăm cea mai generală formă a unui program geometric pozinominal: *să se găsească minimul pozinomului*

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m_0} c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}}$$

cu restricţiile $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\ldots$, $x_n > 0$,

$$f_k(\mathrm{x}) = \sum_{i=l_k}^{m_k} c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}} \leqslant 1,$$

unde $f_k(\mathrm{x})$, $k=1, 2, \ldots, p$, *sînt pozinoame şi* $l_1 = m_0 + 1$, $l_2 = m_1 + 1, \ldots, l_p =$

$=m_{p-1}+1$, $m_p = m$ *este numărul de termeni din toate pozinoamele și numărul variabilelor* [11].

Să presupunem că soluția problemei este un minim local. Făcînd schimbarea de variabile $x_j = e^{z_j}$, ajungem la concluzia că programul pozinomial cu restricții este echivalent cu problema

$$\min_z \left(\sum_{i=1}^{m_0} c_i \exp\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \right) \right)$$

cu restricțiile

$$\sum_{i=l_k}^{m_k} c_i \exp\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \right) \leqslant 1.$$

Observăm însă că aceste funcții sînt strict convexe în z, adică avem de căutat minimul unei funcții strict convexe pe o mulțime convexă. De aceea acest minim este în mod necesar un minim global, proprietate ce se transferă și la programul geometric. În plus, punctul de minim este unic. Utilizînd inegalitatea

$$\forall u_i > 0,\ \delta_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m_0} \delta_i = 1,\ \sum_{i=1}^{m_0} u_i \geqslant \prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i},$$

cu convenția $x^x \equiv 1$ pentru $x = 0$, egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $\frac{u_1}{\delta_1} = \frac{u_2}{\delta_2} = \ldots = \frac{u_{m_0}}{\delta_{m_0}}$, putem scrie

$$f(\mathrm{x}) \geqslant \prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}}}{\delta_i} \right)^{\delta_i}. \tag{7.7}$$

Ținînd seama de varianta cu ponderi nenormate

$$\forall u_i > 0,\ \delta_i \geqslant 0,\ \left(\sum_{i=1}^{s} u_i \right)^{\lambda} \geqslant \lambda^{\lambda} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{u_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i},\ \lambda = \sum_{i=1}^{s} \delta_i,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{u_1}{\delta_1} = \frac{u_2}{\delta_2} = \ldots = \frac{u_s}{\delta_s}$, pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, p$ avem

$$1 \geqslant (f_k(\mathrm{x}))^{\lambda_k} \geqslant \lambda_k^{\lambda_k} \prod_{i=l_k}^{m_k} \left(\frac{c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}}}{\delta_i} \right)^{\delta_i}. \tag{7.8}$$

Deoarece termenii din inegalitățile (7.7) și (7.8) sînt strict pozitivi, prin înmulțire membru cu membru găsim

$$f(x) \geqslant \left[\prod_{i=1}^{m_0}\left(\frac{c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}}}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\right]\left\{\prod_{k=1}^{p}\left[\lambda_k^{\lambda_k}\prod_{i=l_k}^{m_k}\left(\frac{c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}}}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\right]\right\} =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\right]\prod_{k=1}^{p}\lambda_k^{\lambda_k} x_1^{D_1} x_2^{D_2} \ldots x_n^{D_n},$$

unde $\lambda_k = \sum_{i=l_k}^{m_k} \delta_i$, $D_j = \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0, \ldots, \delta_m \geqslant 0$,

$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{m_0} = 1$. Variabilele x_j din membrul al doilea pot fi eliminate printr-o alegere convenabilă a ponderilor și anume

$$D_j = \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

În aceste ipoteze inegalitatea precedentă devine $f(x) \geqslant V(\delta)$, unde

$$V(\delta) = \left[\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\right]\prod_{k=1}^{p}\lambda_k^{\lambda_k}.$$

Funcția definită de $V(\delta)$ pe $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0, \ldots, \delta_m \geqslant 0$ cu convenția $x^x = x^{-x} \equiv 1$ pentru $x = 0$, se numește *funcția duală* atașată pozinoamelor din programul inițial.

Considerațiile precedente arată că programului geometric inițial i se poate atașa următorul program dual: *să se găsească maximul funcției*

$$\delta \to V(\delta) = \left[\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\right]\prod_{k=1}^{p}\lambda_k^{\lambda_k},$$

unde $\lambda_k = \sum_{i=l_k}^{m_k} \delta_i$, $k = 1, 2, \ldots, p$, *cu restricțiile*

$\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0, \ldots, \delta_m \geqslant 0$ (*condiții de pozitivitate*),

$\sum_{i=1}^{m_0} \delta_i = 1$ (*condiția de normalitate*),

$\sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (*condiții de ortogonalitate*).

Observăm că numărul variabilelor m din programul dual este același cu numărul tuturor termenilor din programul inițial. De asemenea, numărul egalităților restricții din programul dual este $n + 1$, unde n este numărul

variabilelor din programul inițial. Factorii $\lambda_k^{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \ldots, p$, din $V(\delta)$ sînt respectiv asociați restricțiilor $f_k(\mathbf{x}) \leqslant 1$.

Programul geometric sau dualul său se numește *consistent* dacă există cel puțin un punct care satisface toate restricțiile. Programul geometric se numește *superconsistent* dacă $\exists \mathbf{x}_*$ astfel încît $f_k(\mathbf{x}_*) < 1$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Teoremă. *Dacă programul geometric pozinomial este superconsistent și admite o soluție, atunci:*

1) *programul dual este consistent și admite soluție,*

2) *minimul cu restricții al lui f este egal cu maximul cu restricții al lui V,*

3) *dacă $\mathbf{x}_0$ este un punct de minim pentru programul pozinomial, atunci există multiplicatorii pozitivi Kuhn-Tucker μ_{k0}, $k = 1, 2, \ldots, p$, astfel încît funcția lui Lagrange*

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{p} \mu_k (1 - f_k(\mathbf{x}))$$

are proprietatea

$$L(x_0, \mu) \leqslant f(x_0) = L(x_0, \mu_0) \leqslant L(x, \mu_0).$$

$\forall \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ cu $x_j > 0$ și $\forall \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ cu $\mu_k \geqslant 0$; de asemenea există un punct de maxim $\delta_0 = (\delta_{10}, \delta_{20}, \ldots, \delta_{m0})$ pentru programul dual, punct ale cărui coordonate sînt date de

$$\delta_{i0} = \begin{cases} \dfrac{c_i x_{10}^{a_{i1}} x_{20}^{a_{i2}} \ldots x_{n0}^{a_{in}}}{f(\mathbf{x}_0)}, & i = 1, 2, \ldots, m_0, \\[2ex] \dfrac{\mu_{k0} c_i x_{10}^{a_{i1}} x_{20}^{a_{i2}} \ldots x_{n0}^{a_{in}}}{f(\mathbf{x}_0)}, & i = l_k, l_k + 1, \ldots, m_k; \; k = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

În plus, $\lambda_{k0} = \dfrac{\mu_{k0}}{f(\mathbf{x}_0)}$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

4) *dacă δ_0 este un punct de maxim pentru programul dual, atunci punctul de minim al programului inițial este soluția sistemului*

$$c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_n^{a_{in}} = \begin{cases} \delta_{i0} V(\delta_0), & i = 1, 2, \ldots, m_0 \\[2ex] \dfrac{\delta_{i0}}{\lambda_{k0}}, & i = l_k, l_k + 1, \ldots, m_k, \end{cases}$$

unde *k parcurge întregii pozitivi $1, 2, \ldots, p$ pentru care $\lambda_{k0} \geqslant 0$.*

Teoremă. *Dacă programul inițial este consistent și dacă există un punct δ_* cu coordonate strict pozitive care satisface restricțiile programului dual, atunci programul inițial are soluție.*

Teoremă. *Fie x_0 un punct de minim pentru programul pozinominal și δ_0 un punct de maxim pentru programul dual.*

1) *Dacă o restricție din programul inițial este activă în x_0, adică $f(x_0) = 1$, atunci toate coordonatele lui δ_0 corespunzătoare acestei restricții sînt strict pozitive, adică $\delta_{i0} > 0$ pentru $i = l_k, l_k + 1, \ldots, m_k$.*

2) *Dacă o restricție din programul inițial nu este activă în x_0, adică $f_k(x_0) < 1$, atunci toate coordonatele lui δ_0 corespunzătoare acestei restricții sînt nule,* adică $\delta_{i0} = 0$ *pentru* $i = l_k, l_k + 1, \ldots, m_k$.

Dacă programul geometric este bine formulat, atunci teoremele precedente au următoarele consecințe:

1) fiecare variabilă din programul inițial trebuie să apară și cu exponent pozitiv și cu exponent negativ;

2) pentru un minim al programului inițial, toate variabilele duale trebuie să fie strict pozitive;

3) dacă cel puțin o variabilă din programul dual corespunzătoare unui termen dintr-o restricție este strict pozitivă, atunci toate variabilele duale corespunzătoare termenilor acelei restricții trebuie să fie strict pozitive și restricția trebuie să fie activă.

Întrucît restricțiile din problema duală sînt liniare, mulțimea determinată de acestea este convexă, iar soluția programului dual se poate obține mult mai ușor decît soluția directă a programului inițial. De asemenea teoremele precedente arată că, după ce cunoaștem soluțiile, ambele programe pot fi reformulate astfel încît în problema duală să nu intervină decît δ-uri strict pozitive. Pe de altă parte, proprietatea logaritmului natural de a fi crescător arată că găsirea $\max\limits_{\delta}(V(\delta)$ este echivalentă cu găsirea $\max\limits_{\delta} \ln V(\delta) = -\min\limits_{\delta}(-\ln V(\delta))$, unde

$$-\ln V(\delta) = \sum_{i=1}^{m_0} \delta_i \ln \frac{\delta_i}{c_i} + \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=l_k}^{m_k} \delta_i \ln \frac{\delta_i}{c_i} - \lambda_k \ln \lambda_k \right),$$

cu convenția $x \ln x \equiv 0$ pentru $x = 0$. Dar funcțiile definite prin $V_i = \delta_i \ln \frac{\delta_i}{c_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m_0$, sînt strict convexe deoarece diferențialele de ordinul doi, $d^2 V_i = \frac{1}{\delta_i} d\delta_i^2$, $\delta_i > 0$, sînt pozitiv definite; funcțiile definite prin $w_k = \sum\limits_{i=l_k}^{m_k} \delta_i \ln \frac{\delta_i}{c_i} - \lambda_k \ln \lambda_k$ sînt convexe deoarece, în baza inegalității lui Cauchy, diferențialele de ordinul doi,

$$d^2w_k = \sum_{i=l_k}^{m_k} \frac{1}{\delta_i} d\delta_i^2 - \left(\sum_{i=l_k}^{m_k} \delta_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=l_k}^{m_k} d\delta_i\right)^2, \ \delta_i > 0,$$ sînt pozitiv semidefinite; suma tuturor acestor funcţii, adică $-\ln V$ este strict convexă. De aceea problema duală a unui program geometric bine formulat este echivalentă cu un program strict convex şi deci, dacă există, maximul cu restricţii al lui V este în mod necesar un maxim global, iar punctul de maxim este unic.

Problemei $\min_{\delta}(-\ln V(\delta))$ cu restricţiile $\delta_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{m_0} \delta_i = 1$, $\sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, i se poate ataşa funcţia Lagrange

$$L = -\ln V(\delta) - \sum_{j=1}^{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij}\right) - t\left(\sum_{i=1}^{m_0} \delta_i - 1\right), \ \delta_i \geqslant 0.$$

De aceea această problemă, sau echivalent problema duală a unui program geometric cu restricţii, are soluţie dacă şi numai dacă sistemul (vezi § 3.7)

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_i} = 0, \ \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0, \ \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

($m + n + 1$ ecuaţii cu $m + n + 1$ necunoscute $\delta_i \geqslant 0$; s_j, t) este compatibil. Fără a scădea generalitatea [11] presupunem că rang $[a_{ij}] = n < m$, unde n este numărul variabilelor x_j, iar m este numărul tuturor termenilor din funcţiile pozinomiale. Sistemul

$$\sum_{i=1}^{m_0} \delta_i = 1, \ \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.9}$$

are $d = m - n - 1$ grade de libertate. Soluţia sa se poate scrie

$$\delta_i = b_i^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^{d} r_\alpha b_i^{(\alpha)},$$

unde r_α sînt numere reale arbitrare, $\mathbf{b}^{(0)} = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \ldots, b_m^{(0)})$ este o soluţie a sistemului (7.9), numită *vector de normalitate*, iar $\mathbf{b}^{(\alpha)} = (b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}, \ldots, b_m^{(\alpha)})$ sînt d soluţii independente ale sistemului omogen,

$$\sum_{i=1}^{m_0} \delta_i = 0, \ \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{ij} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

numite *vectori de nulitate*.

Înlocuind pe δ_i în $V(\delta)$ şi ţinînd seama de condiţiile de nenegativitate, găsim o funcţie $v = v(r_1, r_2, \ldots, r_d)$ definită pe

$$\delta_i = b_i^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^{d} r_\alpha b_i^{(\alpha)} \geqslant 0. \tag{7.10}$$

cu acestea problema duală se reduce la găsirea maximului lui v cu restricțiile (7.10). Conform teoremelor precedente, dacă am ști că toate restricțiile programului pozinominal sînt active, atunci restricțiile (7.10) ar fi inactive, adică am avea de găsit maximul liber al lui v.

Dacă $d = 0$, adică $m = n + 1$, atunci sistemul (7.9) are o soluție unică care este în mod necesar punctul de maxim pentru problema duală. Dacă $d = 1$, 2 sau chiar 3, atunci pentru găsirea aproximativă a maximului lui v este suficient să alcătuim un tabel de valori pentru $v = v(r_1, r_2, \ldots, r_d)$, unde $r_1, r_2, \ldots, r_d$ sînt supuse restricțiilor (7.10).

Numărul d poate fi atașat direct programului pozinomial, $d =$ nr. termenilor — nr. variabilelor — 1. Evident cu cît d este mai mare cu atît este mai greu să găsim soluția problemei duale și deci soluția programului pozinomial. De aceea numărul d a fost numit [11] *grad de dificultate al programului pozinomial*. Observăm că orice soluție δ a restricțiilor duale conduce la un minorant $V(\delta)$ pentru minimul lui f, iar orice soluție $\mathbf{x}$ a restricțiilor inițiale dă un majorant $f(\mathbf{x})$.

7.7. Aplicații

7.7.1. *Cutii de arie minimă.* 1) Să se găsească dimensiunile unei cutii paralelipipedice deschise la partea superioară care să aibă cea mai mică arie posibilă și o capacitate de cel puțin 4 l.

Rezolvare. Notăm cu x, y, z respectiv lungimea, lățimea și înălțimea cutiei. Evident $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ și $xy + 2xz + 2yz$ reprezintă aria cutiei, iar xyz volumul său căruia i se impune restricția $xyz \geqslant 4$. Problema se reduce la a găsi $\min (xy + 2xz + 2yz)$ cu restricțiile $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $4(xyz)^{-1} \leqslant 1$. Acesta este un program geometric pozinominal cu gradul de dificultate zero. Problema duală atașată este

$$\max_{\delta} V(\delta) = \left(\frac{1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{2}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{2}{\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{4}{\delta_4}\right)^{\delta_4}\delta_4^{\delta_4}$$

cu restricțiile

$$\delta_i \geqslant 0,\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1,\ \delta_1 + \delta_2 - \delta_4 = 0,\ \delta_1 + \delta_3 - \delta_4 = 0,\ \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0.$$

Rezolvînd sistemul restricțiilor, găsim soluția unică $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1/3$, $\delta_4 = 2/3$. Rezultă $\max_{\delta} V(\delta) = 3^{1/3}\, 6^{1/3}\, 6^{1/3}\, 4^{2/3} = 12$. Avînd în vedere teoremele de dualitate, $\min (xy + 2xz + 2yz) = 12$, iar punctul de minim este soluția sistemului

$$xy = \frac{1}{3} \cdot 12,\ 2xz = \frac{1}{3} \cdot 12,\ 2yz = \frac{1}{3} \cdot 12,$$

adică $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Rezultatul $\delta_4 = 2/3 > 0$ implică faptul că restricția $xyz \geqslant 4$ este activă, proprietate ce se poate stabili și direct: $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$. Cu alte cuvinte dimensiunile $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$ asigură cea mai mică arie la capacitatea de 4 l.

2) Presupunem că avem de confecționat o cutie de conserve de formă unui cilindru circular drept. Ce rază a bazei și ce înălțime a cutiei asigură cel puțin volumul v cu minimum de material consumat?

Rezolvare. Fie r raza și h înălțimea cilindrului. Aria totală a cilindrului este $2\pi r^2 + 2\pi rh$, iar volumul cilindrului este $\pi r^2 h$. Volumului i se impune condiția $\pi r^2 h \geqslant v$. Datele și întrebarea din problemă conduc la următorul program geometric pozinomial: min $(2\pi r^2 + 2\pi rh)$ cu restricțiile $r > 0$, $h > 0$, $v\pi^{-1} r^{-2} h^{-1} \leqslant 1$. Acest program are gradul de dificultate egal cu zero. Programul dual atașat este

$$\max_{\delta} V(\delta) = \left(\frac{2\pi}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{2\pi}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{v\pi^{-1}}{\delta_3}\right)^{\delta_3}\delta_3^{\delta_3}$$

cu restricțiile $\quad \delta_i \geqslant 0,\ \delta_1 + \delta_2 = 1,\ 2\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_3 = 0,\ \delta_2 - \delta_3 = 0.$

Se găsește soluția unică $\delta_1 = 1/3, \delta_2 = \delta_3 = 2/3$ și deci $\max\limits_{\delta} V(\delta) = (6\pi)^{1/3}(3\pi)^{2/3}(v\pi^{-1})^{2/3} = 3\pi\left(\frac{v}{\pi}\right)^{2/3} 2^{1/3}$. Deci min $(2\pi r^2 + 2\pi rh) = 3\pi\left(\frac{v}{\pi}\right)^{2/3} 2^{1/3}$, iar punctul de minim este soluția sistemului

$$\pi r^2 = \frac{1}{3}\cdot 3\pi\left(\frac{v}{\pi}\right)^{2/3} 2^{1/3},\quad 2\pi r h = \frac{2}{3}\cdot 3\pi\left(\frac{v}{\pi}\right)^{2/3} 2^{1/3},$$

adică

$$r = \left(\frac{v}{2\pi}\right)^{1/3},\quad h = \left(\frac{4v}{\pi}\right)^{1/3} = 2r.$$

Deoarece $\delta_3 = 2/3 > 0$, restricția $v\pi^{-1} r^{-2} h^{-1} \leqslant 1$ trebuie să fie activă, lucru ce se poate verifica și direct, $v\pi^{-1}\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{-2/3}\cdot\left(\frac{4v}{\pi}\right)^{-1/3} = 1$. Dimensiunile $r = \left(\frac{v}{2\pi}\right)^{1/3}$, $h = 2r$ asigură efectiv volumul v cu minimum de material consumat.

7.7.2. *Paralelipipede de volum maxim.* 1) Dintr-un fier cornier de lungime cel mult $4a$ se construiește rama unui acvariu paralelipipedic. Să se determine dimensiunile paralelipipedului astfel ca acvariul să aibă volum maxim.

Rezolvare. Fie x, y, z lungimile muchiilor paralelipipedului. Deoarece volumul paralelipipedului este xyz, sintem conduși la programul max (xyz) cu restricțiile $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x + y + z < a$. Se observă însă că pe mulțimea determinată de restricții avem

$$\max(xyz) = \max\frac{1}{\frac{1}{xyz}} = \frac{1}{\min\frac{1}{xyz}} = \frac{1}{\min(xyz)^{-1}}.$$

Deci problema pusă este echivalentă cu programul geometric pozinomial min $(xyz)^{-1}$ cu restricțiile $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $a^{-1}(x + y + z) \leqslant 1$. Acest program are gradul de dificultate zero. Atașăm programul dual:

$$\max_{\delta} V(\delta) = \left(\frac{1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{1}{a\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{1}{a\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{1}{a\delta_4}\right)^{\delta_4}(\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^{\delta_2+\delta_3+\delta_4}$$

cu restricțiile

$$\delta_i \geqslant 0,\ \delta_1 = 1,\ -\delta_1 + \delta_2 = 0,\ -\delta_1 + \delta_3 = 0,\ -\delta_1 + \delta_4 = 0.$$

găsim soluția unică $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 1$ și deci $\max\limits_{\delta} V(\delta) = V(1, 1, 1,) = \frac{27}{a^3}$. Rezultă $\min (xyz)^{-1} = \frac{27}{a^3}$, iar punctul de minim este soluția sistemului

$$(xyz)^{-1} = \frac{27}{a^3},\ a^{-1}x = \frac{1}{3},\ a^{-1}y = \frac{1}{3},\ a^{-1}z = \frac{1}{3},$$

adică $x = y = z = a/3$. Evident restricția $x + y + z < a$ este activă.

În concluzie, pentru $x = y = z = a/3$ acvariul va avea volumul maxim $a^3/27$.

2) Să se determine paralelipipedul de volum maxim inclus într-un elipsoid dat, ambele corpuri avînd același centru de simetrie.

Rezolvare. Alegînd sistemul de axe ca în fig. 7.3, dimensiunile paralelipipedului vor fi $2|x|$, $2|y|$, $2|z|$ respectiv, unde (x,y,z) este un punct oarecare din corpul elipsoid. Problema cere să găsim $\max (8|x|\ |y|\ |z|)$ cu restricțiile $|x| > 0$, $|y| > 0$, $|z| > 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$. Se observă însă că acest program este echivalent cu programul geometric $\min (|x|\ |y|\ |z|)^{-1}$ cu restricțiile

$$|x| > 0,\ |y| > 0,\ |z| > 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

Problema duală,

$$\max_{\delta} V(\delta) = \left(\frac{1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{1}{a^2\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{1}{b^2\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{1}{c^2\delta_4}\right)^{\delta_4}(\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^{\delta_2+\delta_3+\delta_4}$$

cu restricțiile

$$\delta_i \geqslant 0,\ \delta_1 = 1,\ -\delta_1 + 2\delta_2 = 0,\ -\delta_1 + 2\delta_3 = 0,\ -\delta_1 + 2\delta_4 = 0,$$

are soluția

$$\delta_1 = 1,\ \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \frac{1}{2},\ \max_{\delta} V(\delta) = V\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{abc}.$$

Deci $\min (|x|\,|y|\,|z|)^{-1} = \frac{3\sqrt{3}}{abc}$, iar punctul de minim este

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}},\ y = \frac{b}{\sqrt{3}},\ z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

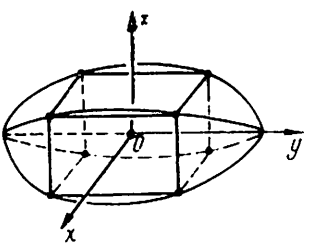


Fig. 7.3.

În concluzie $\max (8\,|x|\,|y|\,|z|)$ este $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$, această valoare atolingîndu-se pentru $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$. Încît restricția $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ este activă în punctul de extrem, paralelipipedul de volum maxim are vîrfurile pe elipsoid.

7.7.3. *Maximul inductivității unei bobine cilindrice.* Inductivitatea unei bobine cilindrice cu mai multe straturi se poate exprima sub forma $u = \frac{mxyz}{ax + by + cz}$, unde x este raza medie de înfășurare, y diferența

dintre raza exterioară și raza interioară, z lungimea bobinei, iar m, a, b, sînt constante strict pozitive. Să se determine maximul funcției $(x, y, z) \to u(x, y, z)$ știind că volumul bobinei este cel mult v.

Rezolvare. Deoarece volumul bobinei este $2\pi xyz$, avem de găsit soluția programului $\max u$ cu restricțiile $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $2\pi xyz \leqslant v$. Ținînd seama că pe mulțimea restricțiilor $\max u = \max \frac{1}{u^{-1}} = \frac{1}{\min u^{-1}}$, programul precedent se reformulează ca un program geometric pozinomial:

$$\min \left(\frac{a}{m} y^{-1}z^{-1} + \frac{b}{m} x^{-1}z^{-1} + \frac{c}{m} x^{-1}y^{-1} \right)$$

cu restricțiile $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $\frac{2\pi}{v} xyz \leqslant 1$. Problemă duală

$$\max_{\delta} V(\delta) = \left(\frac{a}{m\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{b}{m\delta_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{c}{m\delta_3}\right)^{\delta_3} \left(\frac{2\pi}{v\delta_4}\right)^{\delta_4} \delta_4^{\delta_4}$$

cu restricțiile

$$\delta_i \geqslant 0, \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1, \quad -\delta_2 - \delta_3 + \delta_4 = 0, \quad -\delta_1 - \delta_3 + \delta_4 = 0, \quad -\delta_1 - \delta_2 + \delta_4 = 0,$$

are soluția $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{1}{3}$, $\delta_4 = \frac{3}{4}$, $\max_{\delta} V(\delta) = \frac{3}{m} \sqrt[3]{4\pi^2 \frac{abc}{v^2}}$. Rezultă că $\min u^{-1} = \frac{3}{m} \sqrt[3]{4\pi^2 \frac{abc}{v^2}} = A$, iar punctul de minim este

$$x = \sqrt[3]{\frac{bcv}{2\pi a^2}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{acv}{2\pi b^2}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{abv}{2\pi c^2}}.$$ În concluzie,

$$\max u = \frac{m}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2} \frac{v^2}{abc}}.$$

7.7.4. *Proiectarea optimă a unui tachet translant.* Se pune problema dimensionării tachetului translant (de secțiune circulară) al unui mecanism cu camă plană astfel încît simultan să se minimizeze greutatea și costul acestuia. Condițiile tehnice de montaj impun ca diametrul d să fie cel mult d_{max}, iar lungimea l să fie cel puțin l_{min} (fig. 7.4). Pentru simplificarea problemei se consideră cazul în care l este egală cu distanța dintre punctul de contact cu camă și punctul în care acționează forța rezistentă, $\vec{F} = -\vec{F}_{rez}$, iar celelalte solicitări sînt neglijabile în raport cu solicitarea (principală) de compresiune.

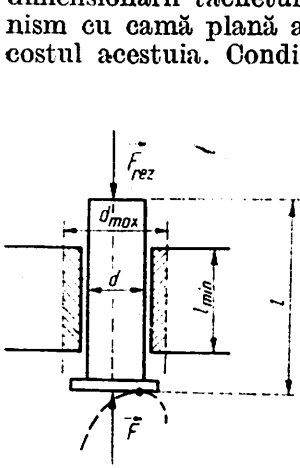


Fig. 7.4

Problema tehnică se reduce la minimizarea simultană a greutății $G = \gamma \frac{\pi d^2 l}{4}$ și a costului $C = kd^{\alpha} l^{\beta}$ în condițiile

$$\frac{4F}{\pi d^2} \leqslant \sigma_a, \quad 0 < d < d_{max}, \quad 0 < l_{min} < l,$$

e γ este greutatea specifică a materialului, k, α, β sînt constante strict pozitive care depind, material, de greutate și de tehnologia de prelucrare, F este forța de compresiune, iar σ_a e efortul unitar admisibil (la compresiune). Considerăm următoarea funcție obiectiv :

$$f = tG + (1 - t)\,C,$$

unde $t \in (0,1)$ descrie importanța pe care o acordăm fiecăruia dintre cele două obiective, greutatea și costul, care sînt incomensurabile simultan. Astfel se obține programul geometric : să se găsească $\min\limits_{(d,l)} f$ cu restricțiile

$$\frac{4F}{\pi\sigma_a}\,d^{-2} \leqslant 1,\quad \frac{1}{d_{\max}}\,d \leqslant 1,\quad l_{\min}\,l^{-1} \leqslant 1,\quad d > 0,\quad l > 0.$$

Gradul de dificultate al acestui program este 2.

Programul dual constă în determinarea maximului lui

$$V(\delta) = \left(\frac{\gamma\pi t}{4\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{k(1-t)}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{4F}{\pi\sigma_a}\right)^{\delta_3}\left(\frac{1}{d_{\max}}\right)^{\delta_4}(l_{\min})^{\delta_5}$$

cu restricțiile

$$\delta_i \geqslant 0,\ \delta_1 + \delta_2 = 1,\ 2\delta_1 + \alpha\delta_2 - 2\delta_3 + \delta_4 = 0,\ \delta_1 + \beta\delta_2 - \delta_5 = 0.$$

Rezolvînd sistemul restricțiilor, problema se reduce la găsirea maximului lui

$$v(\delta_1, \delta_4) = \left(\frac{\gamma\pi t}{4\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{k(1-t)}{1-\delta_1}\right)^{1-\delta_1}\left(\frac{4F}{\pi\sigma_a}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{2-\alpha}{2}\delta_1+\delta_4}\left(\frac{1}{d_{\max}}\right)^{\delta_4}(l_{\min})^{\beta+(1-\beta)\delta_1}$$

cu restricțiile $0 \leqslant \delta_1 \leqslant 1$, $\delta_4 \geqslant 0$. Se observă că $f = t\,G + (1-t)\,C \geqslant G^t\,C^{1-t}$ și funcția obiectiv din programul geometric inițial poate fi înlocuită cu G^tC^{1-t}. Noul program geometric obținut are gradul de dificultate egal cu 1 și deci este mai ușor de rezolvat.

7.7.5. *Optimizarea cheltuielilor specifice în transportul feroviar.* Cheltuielile specifice în transportul feroviar depind de principalii parametri ai circulației trenurilor și anume viteza și tonajul trenului. Acestea rezultă din însumarea a cinci categorii de cheltuieli : cheltuili pentru parcul inventar de locomotive necesare transportului de mărfuri pe o secție de remorcare, cheltuieli efectuate cu parcul de vagoane marfă, cheltuieli pentru retribuirea echipelor de locomotivă, cheltuieli pentru retribuirea partidelor de tren și cheltuieli dependente de lucru mecanic. Punînd problema optimizării acestor cheltuieli [7] a fost obținut următorul program : să se determine minimul lui $f(x) = c_1x_1^{-1}x_2^{-1} + c_2x_1^{-1} + c_3x_2^{-1} + c_4x_1 + c_5x_1x_2^{-1} + c_6x_1^2 + c_7x_1^2x_2^{-1}$ cu restricțiile

$$c_8x_1^{-1} \leqslant 1,\ c_9\,x_1 \leqslant 1,$$

$$c_{10}\,x_1^3 - c_{15}x_1^2 + c_{11}\,x_1 + c_{12}x_1^2\,x_2 + c_{13}\,x_1x_2 + c_{14}\,x_2 \leqslant 1,$$

unde x_1 reprezintă viteza, x_2 este tonajul, iar $c_1, \ldots, c_{15}$ sînt constante strict pozitive.

Punînd $1 + c_{15}x_1^2 < x_3$, problema precedentă se poate reformula ca un program geometric pozinomial : să se determine minimul funcției $(x_1, x_2, x_3) \to g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)$ cu restricțiile

$$c_8x_1^{-1} < 1,\ c_9\,x_1 \leqslant 1,$$

$$c_{10}x_1^3\,x_3^{-1} + c_{11}\,x_1\,x_3^{-1} + c_{12}x_1^2\,x_2\,x_3^{-1} + c_{13}x_1x_2x_3^{-1} + c_{14}\,x_2\,x_3^{-1} < 1,\ c_{15}\,x_1^2x_3^{-1} + x_3^{-1} < 1,$$

$$x_3^{-1} < 1,\ x_1, x_2, x_3 > 0.$$

Gradul de dificultate al acestui program este 13.

Programul dual ataşat constă în găsirea maximului funcţiei

$$V(\delta) = \left(\frac{1}{\delta_{16}}\right)^{\delta_{16}} \left(\frac{1}{\delta_{17}}\right)^{\delta_{17}} \prod_{i=1}^{15} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^{5} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$$

cu restricţiile $\delta_1, \ldots, \delta_{17} \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{7} \delta_i = 1$;

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

unde $\lambda_1(\delta) = \delta_8$, $\lambda_2(\delta) = \delta_9$, $\lambda_3(\delta) = \delta_{10} + \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14}$, $\lambda_4 = \delta_{15} + \delta_{16}$ $\lambda_3 = \delta_{17}$. Res tricţiile programului dual au soluţiile

$$\delta_1 = -1 + 2r_1 + 3r_3 - r_5 + r_6, \ \delta_2 = 1 - r_1 - r_3, \ \delta_3 = 1 - 2r_1 - 3r_3 - r_5 - r_6,$$
$$\delta_4 = r_1, \ \delta_6 = r_3, \ \delta_8 = r_5, \ \delta_9 = r_6, \ \delta_5 = \delta_7 = \delta_{10} = \delta_{11} = \ldots = \delta_{17} = 0,$$

unde

$$0 \leqslant r_1 \leqslant \frac{1}{2}, \ 0 \leqslant r_3 \leqslant \frac{1 - 2r_1}{3},$$

$$0 \leqslant r_6 \leqslant 1 - 2r_1 - 3r_3, \ 0 \leqslant r_5 = 1 - 2r_1 - 3r_3 - r_6. \qquad (7.11$$

Problema duală se reformulează astfel: să se determine maximul funcţiei

$$v(\delta) = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{c_3}{\delta_3}\right)^{\delta_3} \left(\frac{c_4}{\delta_4}\right)^{\delta_4} \left(\frac{c_6}{\delta_6}\right)^{\delta_6} \left(\frac{c_8}{\delta_8}\right)^{\delta_8} \left(\frac{c_9}{\delta_9}\right)^{\delta_9} \delta_8^{\delta_8} \delta_9^{\delta_9}$$

cu condiţiile (7.11). Coeficienţii c_i depind de domeniul de viteză considerat şi deci este necesar o optimizare secvenţială.

7.8. Probleme propuse

7.1. $\min f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{40}{x_1 x_2 x_3} + 40\, x_2 x_3 + 20\, x_1 x_3 + 10\, x_1 x_2$

$x_i > 0, \ i = 1, 2, 3.$

R. $f_{\min} = f(2, 1, 1/2) = 100.$

7.2. $\min f(x_1, x_2) = 2x_1^3 x_2^{-3} + 4x_1^{-2} x_2 + x_1 x_2 + 8\, x_1 x_2^{-1}, \ x_1, \ x_2 > 0$

R. $f_{\min} = f(1{,}254\,;\ 1{,}887) \approx 13{,}069.$

7.3. $\min f(x_1, x_2, x_3) = 40\, x_1 x_2 + 20\, x_2 x_3,$

$$\frac{1}{5} x_1^{-1} x_2^{-1/2} + \frac{3}{5} x_2^{-1} x_3^{-2/3} \leqslant 1, \ x_i > 0, \ i = 1, 2, 3.$$

R. $f_{\min} = f(1/2, 1, 1,) = 40.$

7.4. $\min f(\mathrm{x}) = 200\, x_1 x_2 + 0{,}5\, x_1 x_2^{2/3} x_3^3 + 0{,}82\, x_1 x_2^{2/3} x_3^3 x_4,$

$2{,}74 \cdot 10^6\, x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_4^{-1} \leqslant 1, \ x_4 + 0{,}67 \cdot 10^{-6}\, x_2 x_3 x_4 \leqslant 1, \ x_i > 0,$

$i = 1, 2, 3, 4.$

R. $f_{\min} = f(15\,;\ 16{,}960\,;\ 12{,}2\,;\ 0{,}88) \approx 73{,}26.$

7.5. $\min f(\mathrm{x}) = x_3^{0.8} x_4^{1.4},$

$x_1^{-2} x_3^{-1} + x_2 x_3 \leqslant 1, \ x_1 x_4^{-1} + x_2^{-1} x_4^{-1} \leqslant 1, \ x_i > 0, \ i = 1, 2, 3, 4.$

R. Punctul de minim $x_1 = 0{,}0555\,;\ x_2 = 108\,;\ x_3 = 432\,;\ x_4 = 0{,}0648.$